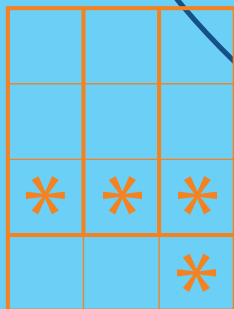
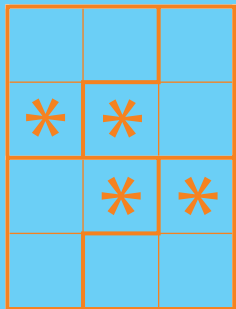


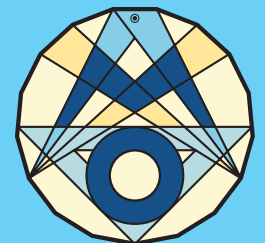
MATHEMATIK- OLYMPIADE

Beispielaufgaben & Lösungen

$$A_4 = \left(2 \cdot \frac{1}{6} \cdot 10^2 \pi - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{10}{2} \sqrt{3} \right) \text{ m}^2 = \left(\frac{100}{3} \pi - 25 \sqrt{3} \right) \text{ m}^2$$



MIT SONDERTEIL 60 JAHRE
MATHEMATIK-OLYMPIADE



MATHEMATIK- OLYMPIADE

Beispielaufgaben & Lösungen

- 4 Vorworte
- 8 Der Wettbewerb
- 10 Früher bis Heute – Sonderteil
- 24 Olympiadeklassen 3 und 4
- 27 Olympiadeklassen 5 und 6
- 32 Olympiadeklassen 7 und 8
- 38 Olympiadeklassen 9 und 10
- 45 Olympiadeklassen 11 und 12 / 13
- 52 Träger und Förderer
- 54 Notizen

Liebe Leserinnen und Leser,

mit ihren jährlich vier Runden ist die Mathematik-Olympiade ein bundesweit fest etablierter Wettbewerb für mathematisch begabte Schülerinnen und Schüler von Klasse 3 bis zum Abitur.



Prof. Dr. Jürgen Prestin



Prof. Dr. Konrad Engel

Zum Jubiläum der 60. Olympiade haben wir Ihnen dieses Heft zusammengestellt, in dem wir zum einen ausgewählte Aufgaben und Lösungen präsentieren und zum anderen einen illustrierten Einblick in das Olympiadeleben geben wollen. Wenn Sie selber einmal an der Mathematik-Olympiade teilgenommen haben, werden Sie sich beim Durchblättern dieses Heftes vielleicht noch einmal in diese Zeit zurückversetzen.

Sehr freuen würde es uns, wenn wir Sie hiermit anregen könnten, die Olympiade an Ihrer Schule zu organisieren oder sich anderweitig an der Durchführung des Wettbewerbs zu beteiligen. Unter www.mathematik-olympiaden.de finden Sie dazu die für Sie passenden Kontakte und Informationen.

Unser Dank gilt an dieser Stelle den vielen Kolleginnen und Kollegen vor Ort, die mit ihrem großen Engagement die Mathematik-Olympiade jedes Jahr erneut zu einem Erfolg werden lassen. Hervorgehoben seien die Mathematik-Lehrerinnen und -Lehrer an den Schulen, der Aufgabenausschuss mit über 50 Kolleginnen und Kollegen und die vielen Hochschulangehörigen, die sich an der Organisation und Korrektur der Lösungen betei-

ligen. Sie verstehen es, ihre Freude an der Mathematik an die Teilnehmerinnen und Teilnehmer weiterzugeben. Der 1994 als Träger des Wettbewerbs gegründete Mathematik-Olympiaden e.V. bündelt diese Aktivitäten rund um die Olympiade und die Förderung mathematisch interessierter Schülerinnen und Schüler.

Wir wünschen diesem Heft eine große Verbreitung und den Leserinnen und Lesern viel Freude an unseren beispielhaft ausgewählten Aufgaben sowie viel Erfolg beim eigenen Knobeln.

A handwritten signature in blue ink that reads "Jürgen Prestin".

Prof. Dr. Jürgen Prestin

1. Vorsitzender des Mathematik-Olympiaden e.V.

A handwritten signature in blue ink that reads "Konrad Engel".

Prof. Dr. Konrad Engel

Vorsitzender des Aufgabenausschusses der Mathematik-Olympiade

Liebe MO-Interessierte und -Begeisterte,

zur Mathematik-Olympiade gibt es viele Geschichten. Wenn im persönlichen oder beruflichen Umfeld das Gespräch auf die Mathematik-Olympiade gelenkt wird, berichten Gesprächspartner häufig und unvermittelt, dass sie in der Schulzeit selber einmal teilgenommen haben, dass eine befreundete Mathematiklehrerin den Wettbewerb in ihrer Klasse anbietet oder dass die Enkelin neulich von solchen Aufgaben gesprochen hat. Die Olympiade ist in der deutschen Schullandschaft etabliert und gewinnt jedes Jahr aufs Neue viele junge Fans, die sie für das Fach Mathematik begeistert. Die jährlich etwa 200.000 Teilnehmenden belegen, dass die Förderung interessierter und begabter Jugendlicher inzwischen längst in einem großen Teil der Schulen des Bundesgebietes angekommen und häufig zur Tradition entwickelt worden ist.

Wer sich erstmals von den Aufgaben zur Teilnahme verführen lässt, kennt in der Regel die bewegte Geschichte der Mathematik-Olympiade nicht. Als staatlicher Schülerwettbewerb der ehemaligen DDR ist es dem Engagement vieler Motivierter zu verdanken, dass sie nicht nur erhalten blieb, sondern inzwischen in ganz Deutschland Schülerinnen und Schüler von dem Förderangebot profitieren können. Bundesweit lebt die Mathematik-Olympiade von den vielen Menschen, die als Lehrkräfte und Ehrenamtliche der nächsten Generation den Reiz näherbringen.

Neben der mathematischen Ausbildung des begabten Nachwuchses steht bei der Mathematik-Olympiade besonders die Begegnung der Teilnehmerinnen und Teilnehmer im Vordergrund. Gleichaltrige zu treffen, die das eigene Interesse am Fach teilen, stellt eine wichtige Erfahrung für Kinder und Jugendliche dar und unterstützt sie in ihrer Entwicklung. In Klausurwettbewerben auf Regional-, Landes und Bundesebene kommen Schülerinnen und Schüler alljährlich zusammen und knüpfen am Rande des Wettbewerbs Kontakte. Es gibt viele Beispiele für daraus erwachsende Freundschaften, die weit über die Schulzeit hinaus bestehen.

Die Verbindung zwischen den Menschen resultiert nicht zuletzt aus der gemeinsamen Erfahrung der Herausforderungen, welche die Mathematik-Olympiade an ihre Teilnehmenden stellt. Die Aufgaben wecken nicht nur Neugier, regen die Phantasie an und motivieren zum logischen Denken und Kombinieren – sie geben auch Anlass zu ausführli-

cher Diskussion von Lösungsansätzen und zur Ergründung darauf aufbauender mathematischer Inhalte.

Auf die Entwicklung verwenden die Verantwortlichen große Sorgfalt. Formulierungen und Schwierigkeitsgrad sind an der jeweiligen Klassenstufe der Teilnehmenden ausgerichtet. Jährlich werden fast 150 neue Aufgaben für die Olympiade-Klassen 3 bis 12 veröffentlicht, die sich von den meisten in der Schule gestellten Problemen unterscheiden: Sie sind komplexer, stellen hohe heuristische Anforderungen und zur Lösung benötigt man eine breite Palette mathematischer Werkzeuge.

Interessante und für den Wettbewerb geeignete Aufgaben stammen vor allem aus der elementaren Zahlentheorie, der Graphentheorie, der Kombinatorik, der Algebra und der Elementargeometrie. Bei der Zusammenstellung achtet der Aufgabenausschuss in jedem Olympiadejahr auf eine ausgewogene Mischung dieser Gebiete. Daneben müssen die Aufgaben unterschiedliche Schwierigkeitsgrade von leicht bis schwer aufweisen, denn auf der einen Seite sollen sie möglichst allen Teilnehmerinnen und Teilnehmern Erfolgserlebnisse ermöglichen, auf der anderen Seite aber auch für die Besten Herausforderungen bereithalten.

Die vorliegende Aufgabensammlung bietet einen Querschnitt durch das reichhaltige Material der Mathematik-Olympiade. Sie als Leserinnen und Leser sind eingeladen, sich von ausgewählten Aufgaben zu eigenen Lösungsversuchen inspirieren zu lassen, um die Erfahrungen der Teilnehmenden im Lösungsprozess selbst zu durchleben. Dabei wünsche ich Ihnen viel Freude.



A handwritten signature in blue ink that reads "P. Bauermann". The signature is fluid and cursive.

Patrick Bauermann

Leiter Bundesweite Mathematik-Wettbewerbe

Die Mathematik-Olympiade in Deutschland ist ein traditionsreicher Wettbewerb für alle Mathefans von Klasse 3 bis 13. Schülerinnen und Schüler haben die Möglichkeit, ihre mathematischen Fähigkeiten unter Beweis zu stellen und weiterzuentwickeln. Anspruchsvolle Aufgaben fördern logisches Denken, Kombinationsfähigkeit und den kreativen Umgang mit mathematischen Methoden. Die Mathematik-Olympiade erstreckt sich für die Klassenstufen 3 bis 7 über drei, ab Klassenstufe 8 über vier Runden. Alle interessierten Schulen erhalten die aktuellen Wettbewerbsunterlagen für jede Runde einschließlich Aufgaben und Lösungen über die Landesbeauftragten in ihrem Bundesland. Ausführliche Informationen sowie Termine rund um die Mathematik-Olympiade finden Sie auf www.mathematik-olympiaden.de.

Klassen 3 und 4

Schulrunde

Schuljahresbeginn,
frühestens 1. August

Die jeweilige Schule legt die Durchführungsform fest und bestimmt, ob die Aufgaben einzeln oder in Gruppen, im Unterricht oder zu Hause bearbeitet werden.

Regionalrunde

Mitte November
bis März

Erfolgreiche Teilnehmerinnen und Teilnehmer der Schulrunde werden zur Regionalrunde eingeladen und schreiben eine Klausur. Der Termin für diese Runde variiert von Bundesland zu Bundesland und liegt frühestens im November.

Landesrunde

Ende Februar
bis Mai

Die Besten der Regionalrunde nehmen an der Landesrunde teil, je nach Bundesland einem ein- oder zweitägigen Klausurwettbewerb. Auch der Landesrundetermin variiert von Bundesland zu Bundesland und liegt frühestens im Februar.

Eine Preisverleihung schließt diese Runde und damit den Wettbewerb für die Grundschüler ab.

Klassen 5 bis 12/13

Schulrunde

Schuljahresbeginn,
frühestens 1. August

Die Schulrunde ist als Hausaufgabenrunde konzipiert, sie kann aber auch als Klausur in der Schule durchgeführt werden. Mit dieser Runde sollen möglichst viele Schülerinnen und Schüler angesprochen werden, sie ist auf eine Breitenwirkung ausgelegt.

Regionalrunde

Mitte November

Mitte November werden erfolgreiche Schülerinnen und Schüler der Schulrunde zur Teilnahme an einer mehrstündigen Klausur eingeladen. An zentralen Orten bearbeiten sie vier Aufgaben.

Landesrunde

Ende Februar

An der Landesrunde nehmen die Besten der Regionalrunde teil. Sie wird Ende Februar in der Regel als zweitägiger Klausurwettbewerb ausgetragen.

Bundesrunde

Mai / Juni

Zur Bundesrunde im Mai oder Juni werden Mannschaften von bis zu fünfzehn Schülerinnen und Schülern ab Klassenstufe 8 aus allen Bundesländern eingeladen. Seit 2014 zählen auch fünf Gäste aus deutschen Auslandsschulen zu den Teilnehmern. An zwei Tagen werden jeweils drei Aufgaben in viereinhalbstündigen Klausuren bearbeitet. Für die Besten der Bundesrunde winkt dann noch die Aussicht auf eine internationale Herausforderung. Sie haben sich mit ihrem Erfolg in der Bundesrunde für die Teilnahme am Auswahlwettbewerb zur Internationalen Mathematik-Olympiade (IMO) qualifiziert, durch den jährlich die Mitglieder der deutschen IMO-Mannschaft ausgewählt werden.

*Selbst aufgestellte Aufgabe
von Hans-Dietrich Gronau*

C 21 (stud.math.H.-Dietrich Gronau, Neustrelitz; wurde 1969
Preisträger der Internationalen Mathematikolympiade)
Es seien p eine Primzahl, k ($k < p$) und z_1, z_2, \dots, z_k natürl.
Zahlen mit $z_1^{p-1} + z_2^{p-1} + \dots + z_k^{p-1} \equiv 0 \pmod{p}$. Man beweise, daß dann
für $i = 1, 2, \dots, k$ gilt $z_i \equiv 0 \pmod{p}$!

Seit Anbeginn mit der Mathematik-Olympiade verbunden

Die 60. Mathematik-Olympiade ist für mich von ganz besonderer Bedeutung, denn ich bin nunmehr auch genau 60 Jahre mit den Olympiaden verbunden.

Als ich in der 5. Klasse war, fand die 1. Olympiade statt und ich nahm in meiner Heimatstadt Neustrelitz teil. Ab 1965 besuchte ich die EOS „Friedrich Engels“ in Neubrandenburg, denn hier gab es eine Mathematik-Klasse. In dieser Zeit nahm ich an zahlreichen Olympiaden bis hin zur IMO teil.

Mir machten die Mathematik-Olympiaden nicht nur immer viel Spaß, sondern sie förderten mit den Kreis- und Bezirksklubs mein mathematisches Interesse und damit auch meinen Berufsweg.

Nach dem Abitur habe ich nicht nur Mathematik in Rostock studiert und bin Mathematiker geworden, ich bin seitdem der Mathematik-Olympiade treu geblieben. Insbesondere war ich bis 2010 über 16 Jahre lang der 1. Vorsitzende des Trägervereins für die Olympiaden.

Ich bin dankbar, dass ich zunächst in meiner Schulzeit 8 Jahre lang an der Mathematik-Olympiade teilnehmen konnte. Danach war ich mein ganzes Leben lang in verschiedensten Formen an der Gestaltung des Wettbewerbs beteiligt. Vor allem freut es mich sehr, dass ich bei den Bemühungen, die Olympiaden zu einem bundesweiten Wettbewerb zu machen, beteiligt war. Ich wünsche der Mathematik-Olympiade eine sehr gute Zukunft!

Prof. Dr. Hans-Dietrich Gronau
Elmenhorst/Lichtenhagen



1966, in der 9. Klasse

2009, IMO Bremen

Erinnerungen an meine aller- erste Mathematik-Olympiade 1960 in Anklam



1960



2020

Die Vorbereitung auf die Mathematik-Olympiade erfolgte für einen meiner Mitschüler und mich sonntagvormittags bei unserer Mathematiklehrerin in deren Zuhause. Der Wettbewerb selbst fand im Kunstraum der EOS „Geschwister Scholl“ in Anklam statt. Er begann mit einem schnellen Kopfrechenteil, bei dem wir nur das Ergebnis aufschreiben durften, keine Lösungswege.

Danach wurden olympiadetypische Aufgaben gelöst. Als Preise wurden Bücher überreicht.

Die Mathematik-Olympiaden sollten mich seitdem jedes Jahr begleiten, als Schülerin, als Studentin und danach als Lehrerin. Zu meiner Tätigkeit gehörte immer die Förderung von mathematischen Talenten, die in der DDR sehr gut organisiert war. Leider wurde diese Förderung, ob in Stadt- und Bezirksclubs, in Mathematiklagern in den Ferien oder Mathematikspezialklassen, nach 1989 so nicht weitergeführt.

Viele der geförderten Schüler sind sehr erfolgreich ihren Weg gegangen, egal, ob in mathematischer, technischer, medizinischer Richtung o.a., sie erinnern sich gerne an die Zeit ihrer Förderung, die Teilnahme an den mathematischen Wettbewerben und ihre Erfolge zurück.

„Nichts ist getan, wenn noch etwas zu tun übrig ist.“ – Carl Friedrich Gauss

Ich wünsche mir, dass dieses für die Stärkung des Mathematikunterrichts und der Talentförderung als Motto dienen sollte, dass Schulleitungen und Kultusministerien erkennen, dass der Mathematikunterricht und die Förderung mathematischer Talente sehr viel dazu beitragen können, Wissenschaften und die Wirtschaft weiterzuentwickeln.

Allen Mitgestaltern der Mathematik-Olympiade möchte ich herzlich für ihre jahrelange Arbeit und das Engagement danken und ihnen für die weitere Arbeit viel Freude und Erfolg wünschen.

Gisela Michaelis
Neubrandenburg

Der Aufgabenausschuss

Eindrücke aus unseren Aufgabengruppen (AG)



„ Familiär „vorbelastet“ ist die Mathematik-Olympiade seit meiner erstmaligen Teilnahme im Jahr 1965 zu einem festen Bestandteil meines Lebens geworden. Sie hat meinen beruflichen Weg zum Hochschullehrer wesentlich mitgeprägt. Das Lösen der Aufgaben hat mir von Anfang an Spaß gemacht, mich herausgefordert und so eine viel umfassendere Sicht auf die Mathematik ermöglicht. Aufgrund meiner Begeisterung für diesen Wettbewerb bin ich nach Ende meiner Schulzeit ständig dageblieben, z.B. nun als Vorsitzender des Aufgabenausschusses. Ich bin sehr froh, dass dieser Wettbewerb nun ein gesamtdeutscher ist, und wünsche ihm eine noch größere gesellschaftliche Anerkennung.

Prof. Dr. Konrad Engel
Vorsitzender des Aufgabenausschusses

„ Wie bin ich Leiter der Aufgabengruppe 5–6 geworden? Ich glaube, eher zufällig, da vor vielen Jahren diese Aufgabengruppe führungslos war und ich einfach gesagt habe, dass ich es mache, obwohl ich von der speziellen Aufgabekultur in diesen Klassenstufen eher wenig Vorstellungen hatte. Natürlich empfindet und empfinde ich es als einen besonderen Reiz, an einer Schnittstelle Aufgaben zu entwickeln, bei denen einerseits noch viel Heuristik, Anschaulichkeit und phänomenorientiertes Herangehen gewünscht ist, denn die Basis verlässlichen mathematischen Wissens ist in dieser Altersklasse noch schmal, die aber andererseits in die Richtung einer „innermathematisch rigiden“ Beweisführung führen sollen. Besonders liegen mir Aufgaben am Herzen, die das Interesse an vertiefter Beschäftigung mit dem vorgestellten Phänomen wecken können. Da meine Arbeitsgruppe und ich nicht nur gut zusammenarbeiten, sondern wir darüber hinaus immer noch viele Ideen haben, die uns bei der Entwicklung und Formulierung großen Spaß machen, habe ich auch nach 25 Jahren immer noch viel Freude an dieser Tätigkeit.

Dr. Klaus Henning
Leiter der AG 5–6 und Landesbeauftragter für Hamburg

„ Mathematik-Olympiaden – sie mischen sich ein in unser Leben in dieser oder jener Form – und immer, wenn wir eine Jahreszahl hören, lesen, schreiben oder sagen, haben wir Erinnerungen, Gedanken, auch Gefühle an Aufgaben, Episoden, Besonderheiten, Prägendes, Begegnungen, Herausragendes, Namen, Orte, ... Sie leben eben, diese Mathematik-Olympiaden, mit uns und in uns, sie bereichern uns, stets positiv im Denken und Empfinden.

Stefanie Tille
Stellvertretende Leiterin der AG 3–4 und Vorsitzende Sächsisches Landeskomitee zur Förderung mathematisch- und naturwissenschaftlich begabter und interessierter Schüler

„ Seit nunmehr 30 Jahren bin ich als Landesbeauftragter für die Mathematik-Olympiade in Sachsen tätig und nun fast schon 10 Jahre im Aufgabenausschuss. Immer wieder konnte ich mit Freude die Begeisterung sehen, die sowohl junge Menschen beim Lösen anspruchsvoller Mathematikaufgaben als auch meine Mitstreiter beim Erstellen und Korrigieren der Aufgaben haben. Das führt mich zu der Überzeugung: Die Mathematik-Olympiade hält jung.

Dr. Horst Ocholt
Leiter der AG 7–8 und Landesbeauftragter für Sachsen

„ Vor vierzig Jahren war es die Teilnahme an Mathematik-Olympiaden von der fünften Klasse an, die mir maßgeblich dabei geholfen hat, mein Interesse und meine Befähigung für Mathematik zu entdecken und zu entwickeln. In späteren Schuljahren hat sie mir Kontakt mit Menschen vermittelt, die diese Begeisterung teilen. So war der Wettbewerb im positiven Sinne prägend für mein ganzes weiteres Leben. Als Mathematiker wirke ich deshalb gern daran mit, den Wettbewerb weiterzutragen, damit auch in Zukunft junge Menschen die beglückende Erfahrung machen können, dass Mathematik Spaß macht, und angeregt werden, der Mathematik einen Platz in ihrem Leben zu geben.

Dr. Martin Welk
Leiter der AG 11–12

Aus dem Olympiade-Leben



Beim Wettbewerbstag der Mathematik-Olympiade geht es nicht nur um Aufgaben, die spannend sind.

In der Grundschule geht es darum, die Eltern mit den Kindern ins Boot zu holen. Denn durch die Anteilnahme von Eltern, Großeltern und Geschwisterkindern erleben die jungen Olympioniken die Mathematik als etwas ganz Besonderes. Es ist ein Event für die ganze Familie. Die Eltern sind stolz und die Kinder genießen es, einen Tag glänzen zu dürfen und im Mittelpunkt zu stehen.

Mathematik wird zum Erlebnis und ist weit mehr als nur das Lösen von Aufgaben.



Dr. Reimund Albers
Landesbeauftragter
für Bremen



Die 4. Runde 2020 war durch die Corona-bedingten Einschränkungen sehr besonders und wird uns allen sicher lange im Gedächtnis bleiben. Ich werde mich in dem Zusammenhang immer an die großartige Realisierung der „Ersatzveranstaltung“ erinnern. In kurzer Zeit wurden noch nie dagewesene Strukturen geschaffen und von allen Beteiligten mit dem festen Willen umgesetzt, sie zum Erfolg zu führen. Der Held der Aktion ist für mich Wolfgang Radenbach, der unermüdlich an der Datenbank arbeitete, so dass dann die ungeheuren Mengen an Daten reibungslos abgerufen und hochgeladen werden konnten.

Rückblickend kann ich sagen, dass es eine großartige, ja sogar euphorisierende Aktion war. Ich fühle mich sehr wohl in diesem Verein, der das so reibungslos und erfolgreich realisieren konnte.



Doris Gabelmann-Küppers
Landesbeauftragte
für Grundschulen in
Schleswig-Holstein



Fünf Punkte für ein Komma

Meine erste 4. Runde (damals „DDR-Olympiade“) erlebte ich 1985 in Erfurt. Damals gab es in der 4. Runde nur die Klassenstufen 10 und 11/12 und ich durfte zum Schnuppern als Frühstarter aus Klasse 8 teilnehmen. Vor mir trat bereits Martin Welk aus dem gleichen Kreis als Frühstarter an und errang dabei sogar einen ersten Preis! Wir wurden beide von Dr. Moldenhauer gefördert und er hielt es für äußerst unwahrscheinlich, dass sich dieses Glanzstück wiederholen würde.

Nach den beiden Klausuren hatte ich dennoch ein gutes Gefühl und glaubte insbesondere, die Aufgabe 4 vollständig gelöst zu haben. Groß war die Enttäuschung, als ich für diese Lösung nur 2 von 7 Punkten erhielt.

Um die Aufgabe zu lösen, benutzte ich zweifaches Abzählen als Argument, kannte den Begriff aber noch nicht und hatte es daher in einem Satz beschrieben, statt es zu zitieren. An diesem stand dann ein „falsch, -5P“ mit der Begründung, dass hier ein zentrales Argument fehle und die Lösung daher nur für Beispiele verwertbar sei. Ich war sehr verunsichert.

Da ich den Fehler nicht nachvollziehen konnte, wandte ich mich an Martin, der auch wieder dabei war und sich meiner Lösung annahm. Ihm fiel sofort auf, dass in dem entscheidenden Satz ein Komma fehlte, wodurch er leider nicht grammatisch falsch wurde, sondern eine ganz andere, einem typischen Denkfehler entsprechende Bedeutung bekam.

Martin half mir bei der Formulierung des Einspruches, der im Wesentlichen darauf abhob, dass ein fehlendes Komma ja keine fünf Punkte wert sein könne.

Die Ergebnisse der Einsprüche wurden erst am nächsten Morgen bekannt. Die Jury erläuterte, dass das fehlende Komma definitiv mehr als einen Punkt wert sei, und ich bekam drei Punkte zusätzlich zugesprochen.

Letztlich stellte sich so heraus, dass die Förderung von Dr. Moldenhauer besser war, als er selbst dachte. Durch die zusätzlichen drei Punkte ergab sich zum zweiten Mal in Folge ein erster Preis für einen durch ihn geförderten Achtklässler in der 4. Stufe der Klasse 10.



Dr. Frank Göring
Leiter der AG 9-10



Fröhliche Stimmung am Wettbewerbstag in Hamburg



Stefan Schmack
Landesbeauftragter für Grundschulen in Hamburg und Leiter der AG 3-4



Ein Highlight im Rahmen meiner Tätigkeit für die Mathematik-Olympiade ist die Durchführung der Landesrunde an meiner Schule.

Über 400 aufgeregte und motivierte Schülerinnen und Schüler, über 40 engagierte und fleißige Helferinnen und Helfer und ein perfekt harmonisierendes und funktionierendes Organisationsteam lassen diesen Termin jedes Jahr zu einem großen Erfolg werden.



Dr. Klaus Henning
Landesbeauftragter für Hamburg und Leiter der AG 5-6



Hamburg ist ein Stadtstaat – daher sind die Kommunikationsstrecken und Wege zwischen den einzelnen Schulen kurz. Die Behörde für Schule und Berufsbildung sah die Mathematik-Olympiade schon früh als förderungs- und unterstützenswert an, sodass wir den Wettbewerb seit 1995 „flächendeckend“ durchführen.

Fast alle Gymnasien und die Hälfte der Stadtteilschulen beteiligen sich. Auch an der Zweiten Runde der Mathematik-Olympiade nehmen mehr als 1.400 Schülerinnen und Schüler teil. Die Unterstützung vieler Kolleginnen, Kollegen und ehemaligen Olympioniken ermöglicht eine zweitägige Landesrunde an meiner Schule mit Hunderten von Teilnehmenden. Die Siegerehrung findet „traditionell“ an der Technischen Universität Hamburg statt. Da auch Wochenendseminare einfach zu organisieren sind, haben wir, so finde ich, gute Bedingungen in unserem Bundesland.



60 Jahre Mathematik-Olympiade in Deutschland bedeuten 15 Jahre Engagement in der Begabungsförderung für mich. Die interessierte und ausdauernde Auseinandersetzung von Schülerinnen und Schülern mit mathematischen Inhalten, die so in der Schule nicht vermittelt werden, ist eine regelmäßige Bereicherung und Motivationsquelle für das eigene pädagogische Handeln. Daneben habe auch ich immer wieder die Gelegenheit bekommen, meine Fachlichkeit zu erweitern, was letztlich allen Schülerinnen und Schülern zugutekommt. Danke für 60 und hoffentlich noch viele weitere Jahre!



Michael Casper mit zwei Schülern bei einem Mathe-Seminar



Als wir Anfang der achtziger Jahre in NRW die ersten lokalen Mathematikwettbewerbe in Essen und Neuss gegründet haben, konnte niemand ahnen, was sich aus diesen bescheidenen Anfängen entwickeln würde. Durch die Wiedervereinigung wurde der Kontakt zu den Olympiaden hergestellt, und die bestehenden Wettbewerbe wurden dort integriert. Nach den ersten Teilnahmen an Bundesrunden wurden auch die Mathematikbegeisterten in anderen Städten und Regionen aufmerksam und wollten sich beteiligen. So war die Mathematik-Olympiade ein starker Anschlag für die Entwicklung des Landeswettbewerbs Mathematik in NRW. Dafür sagen wir heute unseren herzlichen Dank.



Michael Rüsing
Landesbeauftragter für Nordrhein-Westfalen und stellvertretender Vorsitzender im MO e. V.



„Spaß mit Mathe und dem MOBY-Wal“, O-Ton und Foto von Georg Loho, Landesbeauftragter für Bayern

Pure Aufregung, Freude und Vielfalt

Landesrunde an der Grundschule Schleswig-Holstein Nord



„Herzlich willkommen!“ Landeskoordinatorin Doris Gabelmann und ihr Kollege Cay Tonner begrüßen im Uni-Hörsaal in Kiel die Kinder und viele Familienangehörige.

Volles Haus voller Erwartungen! Alle folgen mit Spannung den Erläuterungen der beiden Koordinatoren.

Und dann geht's ran an die Arbeit



Wichtig! Erst die Aufgabenstellung begreifen. Und dabei schön die Ruhe bewahren.



Oder vielleicht lieber 'ne kleine kreative Pause einlegen? Süßes soll sich ja belebend auf die grauen Gehirnzellen auswirken. Schokolade sowieso!



Besser noch mal ganz eng die Köpfe zusammenstecken, bis der Geistesblitz endlich die Gehirne durchzuckt.



Zusammenarbeit ist gefragt! Gute Ideen dazu sind schön, reichen aber nicht. Erst ihre Diskussion im Team bringt Erfolg.



Aber bis es so weit ist, können einem schon mal die Haare zu Berge stehen.

Kluge Köpfe brauchen nicht nur geistiges Futter! Nachdem alle Aufgaben bearbeitet sind, dürfen sich alle, auch die Begleitpersonen, am kalten Büffet stärken.



Jetzt müssen die Großen ran! Grundschullehrerinnen und -lehrer korrigieren die Aufgaben samt Lösungen in Fließbandtechnik. Die Zeit drängt, denn die Ergebnisse werden ungeduldig erwartet.



Endlich geschafft! Cay Tonner überreicht die Urkunden und die von den Organisatoren selbst gepackten Geschenktüten. Eltern applaudieren allen Kindern für ihre Leistungen.



Am Ende kommt wahre Freude auf! Nicht nur bei den zwei Kindern, die es diesmal bis ganz nach oben schafften. Dass alles gut klappte, freut auch Stefan Ziervogel und Doris Gabelmann.



Na dann bis zur nächsten Mathematik-Olympiade! Die kommt ganz sicher. Und das nicht erst in vier Jahren.

Einen herzlichen Glückwunsch zum 60. Geburtstag



” Aus vielen Rückmeldungen der Wettbewerbsteilnehmerinnen und -teilnehmer waren besonders zwei Aspekte erkennbar, die begeisterten. Der erste war die Neugierde auf interessante Aufgaben und Spannung bei der Herausforderung, diese zu lösen. Der zweite war die Möglichkeit, mit gleich gesinnten Schülerinnen und Schülern aus ganz Deutschland in Kontakt zu kommen, mit denen man über interessante Themen diskutieren konnte. Hier einige Original-Rückmeldungen, die dies gut zum Ausdruck bringen.

Irmingard Schmithüsen
Landesbeauftragte für Baden-Württemberg

” Matherätsel haben mich schon immer begeistert und mich mit anderen Rätsel-freunden auszutauschen ist noch schöner. Erst als Teilnehmer, dann als Vereinsmitglied, Korrektor, Organisator, Betreuer und Trainer habe ich seit 2008 stets viel Spaß bei der Mathematik-Olympiade und ich freue mich auf mindestens sechzig weitere Jahre MO, bei der ich selbstverständlich noch lange mithelfen werde, die Begeisterung an der Mathematik im Allgemeinen und die Mathe-Olympiade im Besonderen zu unterstützen. Als Bonus eine Knobelaufgabe: Wie kann man 32 weiße Könige so auf ein Schachbrett stellen, dass es für den nächsten Zug möglichst viele Zugmöglichkeiten gibt? Beweist auch, dass es nicht besser geht!

Marius Graeber

” Ich habe als Schüler 1993 an der 1. gesamtdeutschen Mathematik-Olympiade in Magdeburg teilgenommen. Sowohl damals als auch jetzt als Korrektor gefällt mir an der Mathematik-Olympiade neben den motivierenden Aufgaben besonders die Möglichkeit, mathematisch interessierte und sehr nette Menschen aus ganz Deutschland zu treffen.

Herwig Nübling



Höchste Anspannung bei der Klausur: Landesrunde bei der MO_57 in der DJH Baden-Baden

” Es waren ganz tolle Zeiten, ich habe viele schöne Erinnerungen an die Reisen nach Freiberg, Magdeburg, Hamburg. Weniger an die Klausuren – mir haben die Landes- und Bundeswettbewerbsaufgaben, die man zuhause bearbeiten konnte, meistens besser gefallen –, aber an die Atmosphäre, das Treffen mit anderen „gleich komischen“ Leuten.

Zsuzsanna Major



Erleichternde Abspannung: Freizeitspiel „Zeitungschlagen“ auf der Bundesrunde 1993 in Magdeburg

” Mir ist vor allem das tolle Gemeinschaftsgefühl in Erinnerung geblieben. So wurde ich schon gleich zu Beginn unserer gemeinsamen Fahrt von unserem Team, in dem ich das „Küken“ war, herzlich aufgenommen. Vor allem aber die tolle Stimmung vor Ort hat mich nachhaltig beeindruckt. Es war einfach eine einzigartige Erfahrung, so viele Gleichaltrige zu treffen, mit denen einen nicht nur die Freude an der Mathematik verband, sondern in vielen Fällen auch andere Interessen oder Hobbys oder oft auch einfach eine ähnliche Art zu denken und die Welt zu sehen. Ich denke sehr gerne an diese Zeit zurück!

Katharina Gwinner

” Die Teilnahme an der Mathematik-Olympiade 1993 in Magdeburg habe ich noch in guter Erinnerung. Neben dem eigentlichen Wettbewerb war es vor allem toll, Gleichgesinnte zu treffen, die sich ebenfalls gerne mit Mathematik beschäftigen, die aber auch in anderen Bereichen „ähnlich getickt“ haben. So hatten wir in der Zeit jede Menge Spaß.

Katharina Rupp

Aus Baden-Württemberg wünschen wir der Mathematik-Olympiade weiterhin so schöne Erfolge!

” Die Mathematik-Olympiade war für mich ein großartiges Erlebnis. Einerseits aufregender Wettbewerbs-Charakter, gleichzeitig die Möglichkeit, in Austausch mit mathematikbegeisterten Schülern aus ganz Deutschland zu kommen! Aus interessanten Gesprächen dort haben sich Kontakte und Freundschaften ergeben, die über den Wettbewerb hinaus getragen haben.

Gabi Weitze-Schmithüsen



4. Runde der Mathematik-Olympiade

Als Corona im Frühjahr 2020 in Europa und in der Welt mehr und mehr aktuell wurde, stellten wir fest, dass es uns noch nicht wirklich im täglichen Leben beeinträchtigte: Vereine, Schule, Arbeit, Freizeit: business as usual. Problemlos konnten wir unsere Landesrunde im schönen Göttingen im Februar 2020 durchführen.

Doch vor Ostern wurden wir von Corona eiskalt erwischt: Lockdown!

Infolgedessen mussten wir unser Seminar zur Bundesrunde absagen – die örtliche Keksidustrie musste vermutlich Insolvenz anmelden, da sie mit unserer jährlichen Abnahme an Keksen fest gerechnet hatte ...

So richtig konnten wir es noch nicht glauben, als später auch die Bundesrunde in Bonn aufgrund der Pandemiebestimmungen abgesagt werden musste. Dank eines hartnäckigen und hoch engagierten Teams rund um die Mathematik-Olympiade konnten dessen ungeachtet alle Untiefen und Klippen umschifft werden, so dass einer dezentralen „bundesweiten 4. Runde“ nichts im Wege stand.



Tim Sindelar
7. Klasse



Leonard Kottisch
8. Klasse



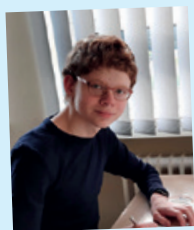
Dmitrii Galatenko
8. Klasse



Gabriel Tofan
8. Klasse



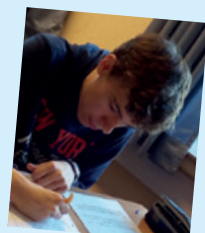
Lukas Schulze
9. Klasse



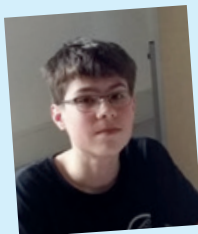
Paul Jakob Schmidt
9. Klasse



**Johannes Raitz
von Frenzt**
9. Klasse



Tammo Mintken
9. Klasse



Florian Elbrandt
10. Klasse



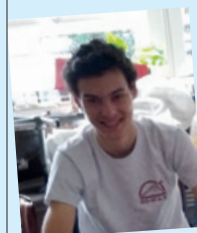
Krümelmonster



Christian Bernert
Telefonhotline
Uni Göttingen



**Liebe Grüße,
Euer Markus Hoffmann!**
Landesbeauftragter



Lucas Vogeler
11. Klasse



Matti Schoss
11. Klasse



Imke Claußen
11. Klasse



**Jonah Leon
Grotelüschen**
12. Klasse



Jonas Bröring
12. Klasse

Man beachte, dass die Sommerferien ja in fast jedem Bundesland anders anfangen und ein gemeinsamer Termin gefunden werden musste, der aber auch irgendwie nicht mit dem Abitur zusammenfallen durfte. In Niedersachsen haben wir dann mit allen Eltern, Teilnehmern und Schulleitern telefoniert, um ihre Gedanken, Sorgen und Anregungen zu dieser Idee zu sammeln. Alle waren ausnahmslos begeistert und glücklich, dass es doch noch irgendwie klappen konnte!

Schließlich war es dann am 18. und 19.6.20 so weit. Zeitgleich schrieb das vierzehnköpfige niedersächsische Team in Schulleiterzimmern, leeren Klassenräumen, Sammlungen oder auch in den heimischen vier Wänden. Alles lief problemlos. Pünktlich wurden die gesannten Lösungen hochgeladen und selbst eine Hotline für „Rückfragen“, wie man es auf Bundesrunden kennt, wurde von Christian Bernert in Göttingen unterhalten.

Auf die Ergebnisse unserer Mannschaft waren wir in diesem Jahr besonders stolz! Zum einen trotz der besonderen Bedingungen und zum anderen, dass irgendwie jeder leistungstechnisch „mehr oder weniger“ über sich hinausgewachsen ist. Respekt!









Bleibt der Trost, dass sich unser Team auch noch nächstes Jahr für eine neue Bundesrunde in Berlin qualifizieren könnte. Dann heißt es hoffentlich wieder: Business as usual!

Bleibt zu hoffen, dass die Pandemie bald überwunden ist!

Während man hoch oben an der Küste dazu eher „Kummt alls, as dat komen mutt“ sagt, halten wir es hier im Raum Hannover eher mit dem „Es ist ja, wie es ist!“

Aufgabe 1 56. MO / 1. Stufe

Teilnehmer der 4. Klassen an einem Schülerwettbewerb,  entspricht 25 Teilnehmern:

	2004	2014
Hamburg		
Erfurt		
Köln		
Berlin		

- In welcher Stadt nahmen im Jahr 2014 die meisten Kinder teil? Bestimme die Anzahl der Kinder.
- In welcher Stadt nahmen im Jahr 2004 die wenigsten Kinder teil? Bestimme die Anzahl der Kinder.
- In welcher Stadt hat sich die Teilnehmerzahl von 2004 zu 2014 verdoppelt?
- Wie viele Schüler nahmen insgesamt 2004 in allen vier Städten am Wettbewerb teil?
- Wie viele Schüler nahmen insgesamt 2014 in allen vier Städten am Wettbewerb teil?
- In welcher Stadt sind von 2004 bis 2014 die meisten Teilnehmer dazugekommen? Wie viele Teilnehmer waren es mehr?
- In welcher Stadt gab es einen Rückgang der Teilnehmerzahlen? Wie viele Teilnehmer waren es weniger?

Lösung

Teil a) Berlin – 325 Teilnehmer

Teil b) Erfurt – 150 Teilnehmer

Teil c) Die Teilnehmerzahl hat sich in Erfurt verdoppelt.

Teil d) Insgesamt: 2004 – 800 Teilnehmer

Teil e) Insgesamt: 2014 – 1100 Teilnehmer

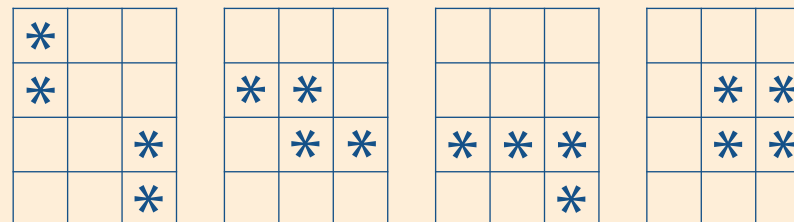
Teil f) In Erfurt war der Anstieg am größten. Es waren 150 Teilnehmer mehr.

Teil g) In Köln gab es einen Rückgang von 25 Teilnehmern.

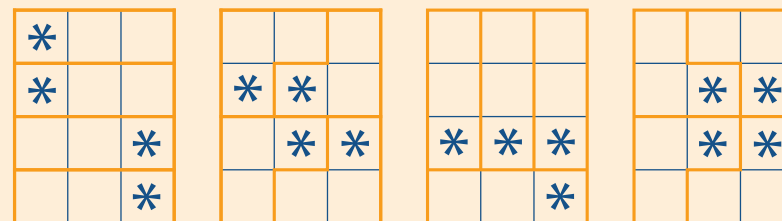
Aufgabe 2 57. MO / 2. Stufe

Ein Garten, der aus 12 kleinen quadratischen Feldern besteht, soll in 4 Teile zerlegt werden. Alle Teile sollen gleich groß sein und die gleiche Form besitzen. Außerdem sollen in jedem Teil gleich viele Blumen stehen.

Zeichne die Trennlinien ein.



Lösung



Aufgabe 3 57. MO / 3. Stufe

Karton A



Karton B



Karton C



In den drei Kartons sind Bleistifte. Die Zahlen auf den Kartons stimmen nicht mehr mit der Anzahl der Bleistifte darin überein. Entweder sind in den Kartons drei Bleistifte mehr oder drei Bleistifte weniger als die notierte Zahl.

- Wie viele Bleistifte können in den einzelnen Kartons sein? Gib jeweils beide Möglichkeiten an.
- Wie viele Bleistifte können insgesamt in den drei Kartons sein? Finde alle unterschiedlichen Anzahlen.

Lösung

Teil a)

Karton A

5 oder 11 Bleistifte

Karton B

9 oder 15 Bleistifte

Karton C

13 oder 19 Bleistifte

Teil b)

$$5 + 9 + 13 = 27$$

$$5 + 9 + 19 = 33$$

$$5 + 15 + 13 = 33$$

$$5 + 15 + 19 = 39$$

$$11 + 9 + 13 = 33$$

$$11 + 9 + 19 = 39$$

$$11 + 15 + 13 = 39$$

$$11 + 15 + 19 = 45$$

Es können 27, 33, 39 oder 45 Bleistifte sein.

Aufgabe 1 60. MO / 1. Stufe

- Stelle 60 als Summe von **zwei** verschiedenen Primzahlen dar. Gib alle Möglichkeiten an.
- Stelle 60 als Summe von **drei** verschiedenen Primzahlen dar. Gib eine Möglichkeit an.
- Stelle 60 als Summe von **vier** verschiedenen Primzahlen dar. Gib eine Möglichkeit an.
- Stelle 60 als Summe von **fünf** verschiedenen Primzahlen dar. Gib eine Möglichkeit an.
- Untersuche, ob man 60 als Summe von **sechs** verschiedenen Primzahlen darstellen kann.

Lösung

Teil a) $60 = 7 + 53 = 13 + 47 = 17 + 43 = 19 + 41 = 23 + 37 = 29 + 31.$

Teil b) Die gerade Zahl 60 kann nicht als Summe von drei ungeraden Zahlen dargestellt werden. Da alle Primzahlen mit Ausnahme der 2 ungerade sind, muss die 2 unter den drei Primzahlen auftauchen.

Zu finden sind also noch zwei Primzahlen, deren Summe 58 beträgt.

Dies gelingt; es gilt $60 = 2 + 5 + 53 = 2 + 11 + 47 = 2 + 17 + 41.$

Teil c) Es gibt viele Möglichkeiten:

$$60 = 3 + 5 + 11 + 41,$$

$$60 = 3 + 5 + 23 + 29,$$

$$60 = 3 + 7 + 13 + 37,$$

$$60 = 3 + 7 + 19 + 31,$$

$$60 = 3 + 11 + 17 + 29,$$

$$60 = 5 + 7 + 11 + 31,$$

$$60 = 5 + 7 + 17 + 31,$$

$$60 = 5 + 7 + 19 + 29,$$

$$60 = 5 + 11 + 13 + 31,$$

$$60 = 5 + 13 + 19 + 23,$$

$$60 = 7 + 11 + 13 + 29,$$

$$60 = 7 + 11 + 19 + 23,$$

$$60 = 7 + 13 + 17 + 23,$$

$$60 = 11 + 13 + 17 + 19.$$

Teil d) Hier muss wieder die 2 auftauchen. Dann kann man weiter untersuchen:

Zum Beispiel $60 = 2 + 58 = 2 + 7 + 11 + 17 + 23$.

Teil e) Im Zahlenraum bis 60 stehen die Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53 und 59 zur Verfügung.

Von diesen müssen sechs ausgewählt werden, um die Summe 60 zu erhalten.

Die 2 darf nicht auftreten.

Die Summe der sechs kleinsten übrigen Primzahlen ist bereits $(3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 =)$ 56, also um 4 weniger als 60.

Die nächste zur Verfügung stehende Primzahl ist 19. Ersetzen wir die 17 durch die 19, so ist die Summe 58 – zu wenig. Ersetzen wir die 13 durch die 19, so ist die Summe 62 – zu viel. Das gilt entsprechend, wenn wir eine der kleineren Zahlen durch die 19 ersetzen. Folglich können wir die 19 nicht verwenden.

Wollen wir die nächste Primzahl, die 23, verwenden, so ist die Summe schon dann zu groß, wenn die 17 durch die 23 ersetzt wird: $3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 23 = 62$.

Folglich können weder die 23 noch größere Primzahlen verwendet werden. Somit lässt sich 60 nicht als Summe von 6 verschiedenen Primzahlen schreiben.

Aufgabe 2 55. MO / 2. Stufe

Herr Kuling, Frau Lange, Herr Ness und Frau Seebach sind zu einer Tagung gefahren und übernachteten in einem Hotel.

Im Hotel haben ihre vier Zimmer die Zimmernummern 544, 646, 751 und 903. Die erste Ziffer gibt jeweils das Stockwerk an – alle vier wohnen also in unterschiedlichen Stockwerken.

Die Vornamen der vier sind Andreas, Hans, Irene und Petronella. Es ist bekannt:

- (1) Die Zimmernummern von Petronella und Hans haben die kleinste Differenz unter den vier Zimmernummern.
- (2) Frau Seebach hat als Einzige eine Zimmernummer, die durch 3 teilbar ist.
- (3) Herr Ness muss zwei Stockwerke nach unten gehen, um zu Herrn Kuling zu gelangen.

Ordne den vier Personen ihre Vornamen und Zimmernummern zu!

Lösung

Da die Zahlen 544 und 646 die kleinste Differenz aufweisen, folgt aus (1):

Die beiden Zimmer 544 und 646 werden von Petronella und Hans bewohnt. (4)

Aus (2) folgt:

Frau Seebach wohnt im Zimmer 903, weil das die einzige durch 3 teilbare Zimmernummer ist. (5)

Aus (4) und (5) folgt:

Frau Seebach kann nicht Petronella heißen, sondern trägt den Vornamen Irene, und Frau Lange muss den Vornamen Petronella haben, weil nur zwei der Personen Frauen sind. (6)

Aus (5) folgt, dass Herr Ness nicht im 9. Stock wohnen kann.

Hieraus und aus (3) folgt, dass Herr Ness im 7. Stock und Herr Kuling im 5. Stock wohnt.

Hieraus und aus (4) folgt, dass Herr Kuling Hans heißt und dass Petronella Lange im Zimmer 646 wohnt. Als letzte verbleibende Möglichkeit folgt die Belegung des Zimmers 751 mit Andreas Ness.

Folglich lautet die gesuchte Zuordnung:

Hans Kuling wohnt im Zimmer 544.

Petronella Lange wohnt im Zimmer 646.

Andreas Ness wohnt im Zimmer 751.

Irene Seebach wohnt im Zimmer 903.

Aufgabe 3 57. MO / 3. Stufe

Ein großer Würfel wird zunächst aus kleinen, gleichartigen Würfeln zusammgebaut. Dann werden wieder einige der kleinen Würfel entfernt. Es entsteht ein Würfelgebäude, wie es in der Abbildung zu sehen ist und von dem man zusätzlich weiß:

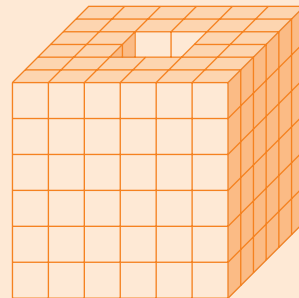
Das Würfelgebäude sieht von unten und oben gleich aus. Man kann hindurchsehen. Es fehlt ein Quader mit quadratischer Grundfläche.

- a) Aus wie vielen kleinen Würfeln besteht das Würfelgebäude?

Das Würfelgebäude wird in ein Farbbad getaucht.

- b) Wie viele kleine Würfel haben dann genau eine gefärbte Würfelfläche?

- c) Wie viele kleine Würfel haben gar keine gefärbte Würfelfläche?



Lösung

Teil a) Ein vollständiger $6 \times 6 \times 6$ -Würfel besteht aus $(6 \cdot 6 \cdot 6 =)$ 216 kleinen Würfeln.

Von einem vollständigen $6 \times 6 \times 6$ -Würfel fehlt ein $2 \times 2 \times 6$ -Quader. Das Gebäude besteht demzufolge aus $(216 - 2 \cdot 2 \cdot 6 = 216 - 24 =)$ 192 kleinen Würfeln.

Teil b) Auf den Außenflächen des Würfelgebäudes gibt es auf der Vorder- und auf der Rückseite sowie auf der linken und auf der rechten Seite jeweils $(4 \cdot 4 =)$ 16 kleine Würfel mit genau einer gefärbten Fläche. Dies sind insgesamt auf den seitlichen Außenflächen $(16 \cdot 4 =)$ 64 kleine Würfel.

Dazu kommen alle kleinen Würfel, die das Loch begrenzen, aber nicht gleichzeitig zur Grund- oder Deckfläche des Würfelgebäudes gehören. Das sind insgesamt $(4 \cdot 2 \cdot 4 =)$ 32 kleine Würfel.

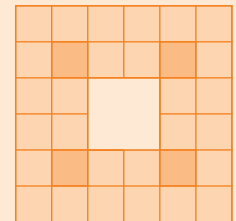
Außerdem gibt es noch auf der Grund- und auf der Deckfläche an den Ecken des Loches jeweils 4 kleine Würfel mit genau einer gefärbten Fläche.

Insgesamt gibt es $(64 + 32 + 8 =)$ 104 Würfel mit genau einer gefärbten Seitenfläche.

Teil c) Das Würfelgebäude wird etagenweise betrachtet. Alle Würfel der untersten und obersten Etage sind wenigstens an einer Seitenfläche gefärbt. Folglich sind die Etagen 2, 3, 4 und 5 auf ungefärbte Würfel zu untersuchen.

In den Etagen 2 bis 5 bleiben je 4 Würfel ungefärbt (siehe Abbildung), woraus eine Gesamtzahl von $(4 \cdot 4 =)$ 16 ungefärbten Würfeln folgt.

In der Abbildung ist ein waagerechter Schnitt durch das Gebäude in den Ebenen 2, 3, 4 oder 5 dargestellt, wobei die hellgrauen Quadrate Würfel darstellen sollen, die an wenigstens einer Seitenfläche gefärbt wurden, und die dunkelgrauen Quadrate die ungefärbten Würfel.



Aufgabe 1 54. MO / 1. Stufe

Anita, Beate und Christina haben zusammen genau 5 Ringe, nämlich 2 aus Gold und 3 aus Silber. Jede hat mindestens einen und höchstens zwei Ringe. Sie unterhalten sich, allerdings sagt hier keines der drei Mädchen die Wahrheit.

Anita sagt: „Ich habe einen Goldring und einen Silberring.“ Beate sagt: „Ich besitze genau zwei Ringe.“ Christina sagt: „Ich habe zwei Ringe aus gleichem Material.“

Untersuche, ob man aus diesen Angaben eindeutig ermitteln kann, wer von ihnen wie viele Ringe welchen Materials besitzt, und gib gegebenenfalls diese Verteilung der Ringe an.

Lösung

Nach Aufgabenstellung gelten die beiden folgenden Aussagen:

Alle drei zusammen haben genau 5 Ringe, nämlich 2 Ringe aus Gold und 3 Ringe aus Silber. (1)

Jede hat mindestens einen und höchstens zwei Ringe. (2)

Da Anita die Unwahrheit gesagt hat, gilt:

Anita besitzt keinen Goldring oder keinen Silberring. (3)

Da Beate die Unwahrheit gesagt hat, besitzt sie nicht genau zwei Ringe.

Wegen (2) gilt also:

Beate besitzt genau einen Ring. (4)

Da Christina die Unwahrheit gesagt hat, besitzt sie nicht zwei Ringe aus gleichem Material. Wegen (2) gilt also:

Christina besitzt nur einen Ring oder genau einen Gold- und genau einen Silberring. (5)

Aus (1), (2) und (4) folgt:

Anita und auch Christina besitzen jeweils genau zwei Ringe. (6)

Aus (5) und (6) folgt:

Christina besitzt genau einen Gold- und genau einen Silberring. (7)

Aus (3) und (6) folgt:

Anita besitzt genau zwei Ringe aus gleichem Material. (8)

Aus (7), (8) und (1) folgt:

Anita besitzt genau zwei Ringe, und zwar aus Silber. (9)

Aus (7), (9) und (1) folgt:

Beate besitzt genau einen Ring, und zwar aus Gold.

Aus den Angaben der Aufgabenstellung kann folglich eindeutig geschlossen werden, wie viele Ringe welchen Materials jedes der drei Mädchen besitzt. Die einzige Möglichkeit ist: Anita besitzt zwei Silberringe, Beate einen Goldring und Christina einen Gold- und einen Silberring.

Aufgabe 2 57. MO / 2. Stufe

Eine neue Rechenoperation \circ zweier rationaler Zahlen a und b mit $b \neq 0$ wird durch

$$a \circ b = a - \frac{a}{b}$$

erklärt. Zum Beispiel gilt

$$1 \circ 3 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

a) Berechne $7 \circ 4$ und $7 \circ (-2)$.

b) Prüfe durch Rechnung nach, ob $3 \circ 4 = 4 \circ 3$ und $(6 \circ 3) \circ 4 = 6 \circ (3 \circ 4)$ gelten.

c) Ermittle die Zahl a , für die $a \circ 2 = 2$ gilt.

d) Ermittle alle Paare (a, b) aus ganzen Zahlen a und b , für die $a \circ b = 0$ gilt.

Lösung

Teil a) Es gelten $7 \circ 4 = 7 - \frac{7}{4} = \frac{28-7}{4} = \frac{21}{4}$ und $7 \circ (-2) = 7 - \frac{7}{-2} = \frac{14+7}{2} = \frac{21}{2}$.

Teil b) Es gelten $3 \circ 4 = 3 - \frac{3}{4} = \frac{12-3}{4} = \frac{9}{4}$ und $4 \circ 3 = 4 - \frac{4}{3} = \frac{12-4}{3} = \frac{8}{3}$. Wegen $\frac{9}{4} \neq \frac{8}{3}$ gilt die Gleichung $3 \circ 4 = 4 \circ 3$ nicht.

Es gelten

$$(6 \circ 3) \circ 4 = 6 \circ 3 - \frac{6 \circ 3}{4} = 6 - \frac{6}{3} - \frac{6 - \frac{6}{3}}{4} = 4 - \frac{4}{4} = 3$$

und

$$6 \circ (3 \circ 4) = 6 \circ \left(3 - \frac{3}{4}\right) = 6 \circ \frac{12-3}{4} = 6 \circ \frac{9}{4} = 6 - \frac{6}{\frac{9}{4}} = 6 - \frac{24}{9} = 6 - \frac{8}{3} = \frac{18-8}{3} = \frac{10}{3}.$$

Wegen $3 \neq \frac{10}{3}$ gilt auch die Gleichung $(6 \circ 3) \circ 4 = 6 \circ (3 \circ 4)$ nicht.

Teil c) Es gilt $a \circ 2 = 2$ genau dann, wenn $a - \frac{a}{2} = 2$ gilt. Das ist äquivalent zu $\frac{a}{2} = 2$ und daher zu $a = 4$.

Teil d) Wegen $a \circ b = a - \frac{a}{b} = a \cdot \left(1 - \frac{1}{b}\right)$ gilt $a \circ b = 0$ genau dann, wenn $a = 0$ gilt und b eine beliebige, von 0 verschiedene ganze Zahl ist oder wenn $1 - \frac{1}{b} = 0$ gilt, also $b = 1$ gilt und a eine beliebige ganze Zahl ist. Die gesuchten Paare sind also alle Paare $(0, b)$ mit einer von 0 verschiedenen ganzen Zahl b und alle Paare $(a, 1)$ mit einer ganzen Zahl a .

Aufgabe 3 55. MO / 3. Stufe

Das Viereck $ABCD$ ist ein Trapez, bei dem die drei Seiten \overline{BC} , \overline{CD} und \overline{AD} gleiche Länge haben und die Seite \overline{AB} doppelt so lang wie die Seite \overline{BC} ist. Der Diagonalschnittpunkt heißt S .

Ermittle die Größe des Winkels ASB .

Lösung

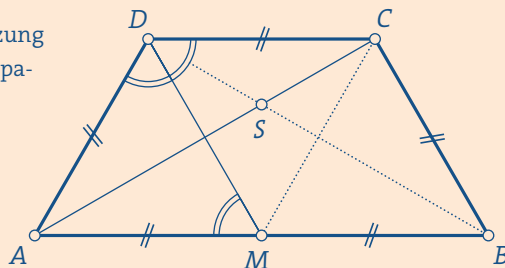
Wir bezeichnen den Mittelpunkt der Strecke \overline{AB} mit M . Nach Voraussetzung gilt dann

$$\frac{1}{2} \cdot |AB| = |AM| = |BM| = |BC| = |CD| = |AD|. \quad (1)$$

Da das Viereck $ABCD$ nach Voraussetzung ein Trapez ist, sind zwei seiner Seiten parallel zueinander. Wegen (1) kann nur

$$AB \parallel CD \quad (2)$$

gelten, siehe Abbildung.



Wegen (1) ist das Dreieck AMD gleichschenkelig mit der Basis MD . Nach dem Basiswinkelsatz gilt daher

$$|\sphericalangle ADM| = |\sphericalangle DMA|. \quad (3)$$

Wegen (2) und nach dem Wechselwinkelsatz angewandt auf die Parallelen AB und CD folgt

$$|\sphericalangle MDC| = |\sphericalangle DMA|. \quad (4)$$

Aus (1), (3) und (4) folgt

$$|AD| = |CD|, |\sphericalangle ADM| = |\sphericalangle MDC|.$$

Hieraus folgt, dass eine Spiegelung an der Geraden DM den Punkt A auf den Punkt C und den Punkt C auf den Punkt A abbildet, also die Gerade AC auf sich. Folglich steht die Gerade AC senkrecht auf der Spiegelachse DM ,

$$DM \perp AC. \quad (5)$$

Aus (1) und (5) folgt, dass die Gerade AC eine Spiegelachse des Dreiecks AMD ist und dass daher der Punkt M Spiegelpunkt von D bei der Spiegelung des Dreiecks ACD an der Geraden AC ist. Hieraus folgt, dass die Strecke \overline{CD} bei Spiegelung an der Geraden AC auf die Strecke \overline{CM} abgebildet wird. Daher gilt

$$|CM| = |CD|. \quad (6)$$

Ebenso lässt sich mit Hilfe der beiden gleichschenkligen Dreiecke MBC und BCD zeigen, dass M Spiegelpunkt von C bei Spiegelung an der Geraden BD ist. Daher gilt

$$|DM| = |CD|. \quad (7)$$

Aus (1), (6) und (7) folgt

$$|CM| = |DM| = |AM| = |BM| = |BC| = |CD| = |AD|. \quad (8)$$

Aus (8) folgt nun, dass die Dreiecke AMD und MBC gleichseitig sind und jeder ihrer Innenwinkel somit die Größe 60° hat. Weiter folgt aus (8), dass jedes der beiden Vierecke $AMCD$ und $MBCD$ ein Rhombus ist und da in einem Rhombus die Diagonalen Winkelhalbierende sind, gilt $|\sphericalangle BAS| = |\sphericalangle SBA| = 30^\circ$. Hieraus und nach dem Innenwinkelsatz angewandt auf das Dreieck ABS folgt $|\sphericalangle ASB| = 180^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 120^\circ$.

Der Winkel $\sphericalangle ASB$ ist also 120° groß.

Aufgabe 4 53. MO / 4. Stufe

Ein Würfel soll in kleinere Würfel zerlegt werden, wobei jede Seitenfläche eines jeden der kleineren Würfel parallel zu einer Seitenfläche des Ausgangswürfels sein soll.

- Weise nach, dass man den Würfel wie gefordert in 29, in 34 und auch in 20 kleinere Würfel zerlegen kann.
- Beweise: Für jede natürliche Zahl $n \geq 115$ kann ein Würfel wie gefordert in n kleinere Würfel zerlegt werden.
- Untersuche, ob der Satz aus Teilaufgabe b) auch mit 71 anstelle von 115 gilt.

Lösung

Eine Zerlegung des Würfels in Teilwürfel derart, dass alle Seitenflächen aller Teilwürfel parallel zu Seitenflächen des Ausgangswürfels liegen, wird zulässige Zerlegung genannt.

Teil a) Durch Halbieren der Kanten eines Würfels kann dieser zulässig in ($2^3 =$) 8 Würfel zerlegt werden. Die Gesamtanzahl der Würfel erhöht sich dadurch um 7. Führt man solche Zerlegungen ausgehend vom Ausgangswürfel und fortführend mit beliebigen Teilwürfeln vier Mal durch, erhält man insgesamt ($1 + 4 \cdot 7 =$) 29 Würfel.

Durch Dritteln der Kanten eines Würfels kann dieser zulässig in ($3^3 =$) 27 kleinere Würfel zerlegt werden. Die Gesamtanzahl der Würfel erhöht sich dadurch um 26. Zerlegt man einen der entstandenen Teilwürfel durch Halbieren der Kanten zulässig in Würfel, erhält man insgesamt ($1 + 1 \cdot 26 + 1 \cdot 7 =$) 34 Würfel.

Werden in einem Würfel, welcher durch Dritteln in 27 Teilwürfel zerlegt ist, 8 dieser Teilwürfel wieder zu einem einzigen Würfel vereinigt, so verringert sich die Gesamtanzahl der Würfel um 7. Man erhält so insgesamt ($1 + 1 \cdot 26 - 1 \cdot 7 =$) 20 Würfel.

Teil b) Wie in Teil a) bemerkt, kann man die Anzahl der Teilwürfel in zulässiger Weise um 7 erhöhen, indem man einen der Würfel in 8 kongruente Teilwürfel zerlegt. Wir zeigen, dass es Zahlen m_0, m_1, \dots, m_6 derart gibt, dass für jedes $i \in \{0, 1, \dots, 6\}$ einerseits die Zahl m_i den Rest i modulo 7 hat und andererseits eine zulässige Zerlegung in m_i Teilwürfel existiert. Wir können $m_1 = 1$ wählen.

Durch Zerlegen eines Würfels in 27 kongruente Teilwürfel und Zusammenfügen von 8 dieser Teilwürfel zu einem Würfel erhöht sich die Anzahl der Teilwürfel um ($-1 + 27 - 8$

$+ 1 =$) 19. Ausgehend vom Ausgangswürfel und durch ein- oder mehrfache Anwendung dieses Zerlegungsschrittes erhalten wir der Reihe nach $m_6 = 20, m_4 = 39, m_2 = 58, m_0 = 77, m_5 = 96$ und $m_3 = 115$.

Zulässige Zerlegungen existieren daher für die Zahlen $77 + 7k, 1 + 7k, 58 + 7k, 115 + 7k, 39 + 7k, 96 + 7k$ und $20 + 7k$ mit $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Zu jeder Zahl $n \geq 115$ existiert eine natürliche Zahl k_n derart, dass sich n in der Form $m_i + 7k_n$ darstellen lässt, wobei i der Rest von n modulo 7 ist. Folglich gibt es zu jeder Zahl $n \geq 115$ eine zulässige Würfelzerlegung.

Teil c) Wir untersuchen, ob sich die in Teil b) gefundenen Zahlen m_3 und m_5 durch kleinere Zahlen ersetzen lassen. Durch Zerlegen eines Würfels in ($4^3 =$) 64 Teilwürfel und dann durch Zusammenfügen von 27 dieser Teilwürfel wieder zu einem Würfel bleibt die Zulässigkeit der Zerlegung erhalten und die Gesamtzahl der Würfel erhöht sich um ($-1 + 64 - 27 + 1 =$) 37. Vom Ausgangswürfel ausgehend erhält man so zuerst ($1 + 37 =$) 38 Teilwürfel und dann nach nochmaliger Anwendung dieses Zerlegungsschrittes ($38 + 37 =$) 75 Teilwürfel. Wegen $38 \equiv 3 \pmod{7}$ und $75 \equiv 5 \pmod{7}$ können $m_3 = 38$ und $m_5 = 75$ gewählt werden.

Zulässige Zerlegungen existieren daher für $77 + 7k, 1 + 7k, 58 + 7k, 38 + 7k, 39 + 7k, 75 + 7k$ und $20 + 7k$ mit $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ und folglich für jedes $n \geq 71$, da $71 = 1 + 10 \cdot 7, 72 = 58 + 2 \cdot 7, 73 = 38 + 5 \cdot 7, 74 = 39 + 5 \cdot 7, 75 = 75 + 0 \cdot 7, 76 = 20 + 8 \cdot 7$ und $77 = 77 + 0 \cdot 7$ gelten.

Aufgabe 1 52. MO / 1. Stufe

Ein Schafstall besitzt einen quadratischen Grundriss mit 10 m Seitenlänge. Auf die Ostwand des Stalls stößt senkrecht und mittig ein Zaun, durch den das Umkreisen des Stalls unmöglich wird. Ein Schaf grasst südlich dieses Zauns. Es ist mit einem 25 m langen (dünnen) Strick genau an der Stelle angepflockt, an welcher der Zaun auf die Wand stößt – siehe Skizze.



Das Schaf frisst sämtliches Gras, das in der durch Strick, Zaun und Stall begrenzten Reichweite liegt.

- Erstellen Sie eine Ergänzung der obigen Skizze mit der Fläche, die das Schaf abgrasen kann. (Eine Begründung der Korrektheit der Skizze wird nicht erwartet.)
- Berechnen Sie den Inhalt der abgrasbaren Fläche.
- Der Zaun wird jetzt beseitigt. Dadurch kann das Schaf in beiden Richtungen um den Stall laufen. Berechnen Sie auch für diesen Fall die Größe der abgrasbaren Fläche.

Lösung

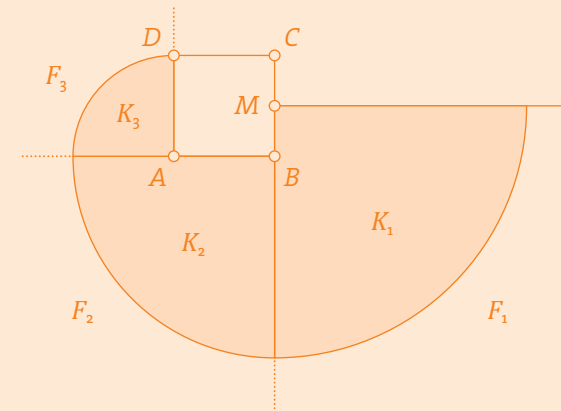
Teil a) Die darzustellende Fläche besteht aus drei Viertelkreissektoren K_1 , K_2 und K_3 , wie in der Skizze auf der nächsten Seite dargestellt.

Dabei wurden die folgenden zusätzlichen Modellannahmen getroffen:

- Ein Strick von x Metern Länge begrenzt die abgrasbare Fläche auf eine Kreisseibe mit dem Radius x Meter.

- Ein Strick kann auf der Grenze einer abgrasbaren Fläche liegen, z. B. auf der Grenze zum Schafstall.

Der (nicht verlangte) Korrektheitsnachweis:



Wir verwenden die Bezeichnungen der Skizze, insbesondere sind F_1 , F_2 und F_3 die Winkelfelder der Mittelpunktswinkel der Kreissektoren K_1 , K_2 und K_3 .

Wenn P in F_1 liegt, dann liegt auch \overline{MP} in F_1 und jede Linie von M nach P ist mindestens so lang wie \overline{MP} . Daher sind in F_1 genau die Punkte P mit $|MP| \leq 25$ m erreichbar, also der Viertelkreissektor K_1 .

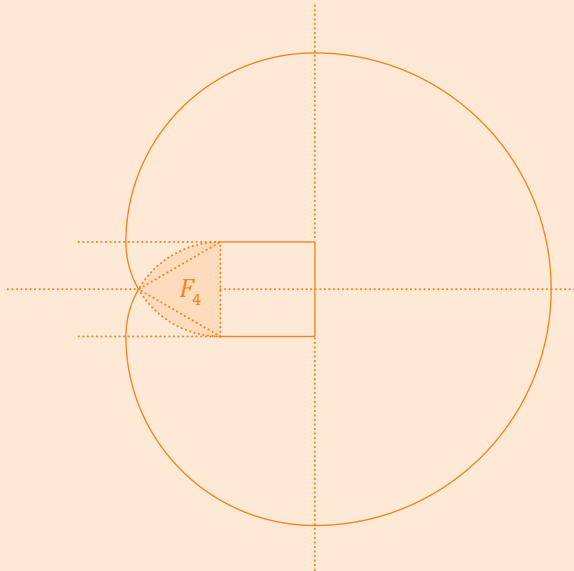
Wenn P in F_2 liegt, dann schneidet jede zulässige Linie von M nach P die Verlängerung von \overline{MB} über B hinaus in einem Punkt Q , ist also mindestens so lang wie der Streckenzug $MQP = MBQP$. Wenn Q von B verschieden ist, dann ist der Streckenzug BQP nach der Dreiecksungleichung länger als \overline{BP} . Also ist jede zulässige Linie von M nach P mindestens so lang wie der Streckenzug MBP . Wegen $|MB| = 5$ m sind daher von M aus in F_2 genau die Punkte P mit $|BP| \leq 20$ m erreichbar, also der Viertelkreissektor K_2 . Der Strick muss für das Erreichen der Randpunkte straff gespannt sein.

Analog schließt man, dass von M aus in F_3 genau die Punkte P mit $|AP| \leq 10$ m erreichbar sind, also der Viertelkreissektor K_3 .

Teil b) Die gesuchte Fläche besteht aus den drei Viertelkreissektoren K_1 , K_2 und K_3 mit den Radien 25 m, 20 m bzw. 10 m. Ihr Flächeninhalt beträgt also

$$A = \frac{1}{4} \cdot (25^2 + 20^2 + 10^2) \cdot \pi \text{ m}^2 = \frac{1125}{4} \cdot \pi \text{ m}^2 \approx 880 \text{ m}^2.$$

Teil c)



Die gesuchte Fläche entsteht durch Vereinigung der Fläche aus Aufgabe a) mit ihrem Spiegelbild bei der Spiegelung an der Mittellinie von Nord- und Südwand des Stalls. Diese beiden Flächen überschneiden sich in der Fläche F_4 mit dem Inhalt A_4 (siehe Skizze). F_4 entsteht aus zwei Sechstelkreis-Sektoren mit dem Radius 10 m, die sich in einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge 10 m überschneiden. Also gilt

$$A_4 = \left(2 \cdot \frac{1}{6} \cdot 10^2 \pi - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{10}{2} \sqrt{3} \right) \text{m}^2 = \left(\frac{100}{3} \pi - 25 \sqrt{3} \right) \text{m}^2.$$

Für den gesuchten Gesamtflächeninhalt G erhält man mit b)

$$\begin{aligned} G &= 2A - A_4 = \left(2 \cdot \frac{1125}{4} \pi - \left(\frac{100}{3} \pi - 25 \sqrt{3} \right) \right) \text{m}^2 \\ &= \left(\frac{3175}{6} \pi + 25 \sqrt{3} \right) \text{m}^2 \approx 1700 \text{m}^2. \end{aligned}$$

Aufgabe 2 54. MO / 2. Stufe

Anton und Benno treffen sich an ihrem heutigen gemeinsamen Geburtstag und stellen Folgendes fest:

Anton: „Sobald ich so alt bin, wie du sein wirst, wenn ich so alt sein werde, wie du heute bist, wirst du 83 Jahre alt sein.“

Benno: „Richtig, denn als ich 30 war, war ich ja doppelt so alt, wie du damals warst.“

Zeigen Sie, dass sich hieraus eindeutig bestimmen lässt, wie alt die beiden sind, und geben Sie das Produkt der beiden Altersangaben an.

Hinweis: Es soll davon ausgegangen werden, dass es sich bei allen Altersangaben um positive ganze Zahlen handelt.

Lösung

Wir bezeichnen das jeweilige aktuelle Alter mit a bzw. b .

Aus der Aussage von Benno ergibt sich: Als Benno 30 war, war Anton 15 Jahre alt. Also gilt für die Altersdifferenz $b - a = 15$ und für Antons Alter gilt $a = b - 15$.

Nun zu Antons Aussage: Anton ist in $b - a$ Jahren (also in 15 Jahren) so alt wie Benno jetzt. Dann ist Benno $b + (b - a) = b + 15$ Jahre alt.

Anton wird das Alter $b + 15$ in 30 Jahren erreichen. Dann ist Benno $b + 30$ Jahre alt und wir erhalten $b + 30 = 83$ und damit $b = 53$ und $a = 38$.

Das Produkt beider Zahlen ist $38 \cdot 53 = 2014$.

Aufgabe 3 55. MO / 3. Stufe

Die Position eines rechteckigen, zwei Meter langen und ein Meter breiten Freigeheges für Kleintiere auf einer Wiese kann durch Anheben an einer Ecke, Drehen um die gegenüberliegende Ecke und nachfolgendes Absetzen geändert werden. Diese Bewegung des Freigeheges sei mit „Eckdrehung“ gemeint.

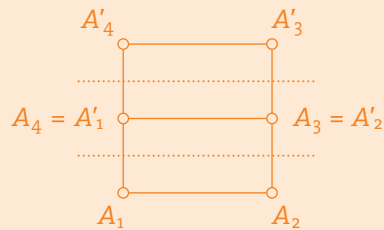
Wie viele Eckdrehungen sind mindestens nötig, um das Freigehege letztendlich genau um seine Breite (in Richtung derselben) zu verschieben?

Insbesondere soll also jede Ecke des Freigeheges am Ende genau einen Meter von ihrer Ausgangsposition entfernt sein.

Lösung

Es sind mindestens drei Eckdrehungen nötig.

Die Lage des Freigeheges sei zu Beginn durch das Rechteck $A_1A_2A_3A_4$ mit Breite $|A_1A_4|$ und Länge $|A_1A_2|$ beschrieben. Die gewünschte Verschiebung soll die Ecke bei A_1 nach A_4 überführen und A_1, A_2, A_3, A_4 auf A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 abbilden.



Wir lösen die Aufgabe in zwei Schritten:

Schritt 1: Man benötigt mindestens drei Eckdrehungen.

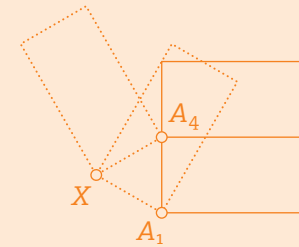
Eine Eckdrehung reicht nicht aus, da eine Drehung stets einen Punkt (das Drehzentrum) unverändert lässt, eine Verschiebung jedoch nicht.

Wir zeigen nun, dass zwei Eckdrehungen ebenfalls nicht ausreichen. Da wie oben bemerkt jede Drehung einen Fixpunkt hat, muss nach der vorletzten Eckdrehung eine Ecke des Freigeheges ihre Endposition erreicht haben.

Seien A_i und A_j die Positionen zweier beliebiger Ecken des Freigeheges vor der Verschiebung, und A'_j sei die Position der zweiten Ecke nach der Verschiebung. Dann sind die Abstände von A_i zu A_j und A_i zu A'_j stets voneinander verschieden, weil A_i nicht auf der Mittelsenkrechten von A_j, A'_j liegt (siehe Abbildung oben).

Da bei Drehungen der Abstand eines Punktes zum Drehzentrum konstant bleibt, kann daher die Bedingung, dass nach der vorletzten Eckdrehung eine Ecke des Freigeheges ihre Endposition A'_j erreicht haben muss, nicht nach nur einer Eckdrehung (um A_i) erfüllt sein. Daher kann die erste Drehung nicht die vorletzte Drehung sein.

Schritt 2: Drei Eckdrehungen reichen aus.



Wir zeigen nun, dass die gesuchte Anzahl drei ist, indem wir drei Eckdrehungen angeben, die zusammen die gewünschte Verschiebung ergeben. (Hierfür gibt es viele verschiedene Möglichkeiten.)

Es sei X ein Punkt derart, dass A_1A_4X ein gleichseitiges Dreieck bildet. In der ersten Eckdrehung drehen wir das Freigehege so um A_1 , dass seine Ecke bei A_4 auf den Punkt X wandert; dies ist möglich, da $|A_1A_4| = |A_1X|$ gilt.

In der zweiten Eckdrehung drehen wir das Freigehege so um X (was ja nun Ecke des Freigeheges ist), dass die Ecke bei A_1 auf den Punkt A_4 wandert; dies ist möglich, da $|XA_1| = |XA_4|$ gilt.

In der dritten Eckdrehung drehen wir so um A_4 , dass die Ecke bei X auf den Punkt A'_4 wandert; dies ist möglich, weil $|A_4X| = |A_4A_1| = |A'_4A_4|$ gilt.

Insgesamt geht hierbei die Ecke A_4 nach A'_4 und die Ecke A_1 nach $A_4 = A'_1$. Es handelt sich also tatsächlich um die gewünschte Verschiebung.

Aufgabe 4 57. MO / 4. Stufe

Jede der zwölf Seitenflächen zweier Spielwürfel A und B soll derart mit einer von zwölf aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen beschriftet werden, dass je zwei Seitenflächen unterschiedlich beschriftet sind. Die Summe der Zahlen soll auf jedem Würfel genau 57 betragen.

- Zeigen Sie, dass eine derartige Beschriftung möglich ist.
- Beweisen Sie: Unabhängig davon, wie eine solche Beschriftung vorgenommen wird, ist die Wahrscheinlichkeit, bei einem Wurf mit A eine höhere Zahl zu erzielen als bei einem Wurf mit B , genau gleich $\frac{1}{2}$.

Anmerkung: In Teil b) wird vorausgesetzt, dass es sich um faire Würfel handelt, jede der Zahlen also mit gleicher Wahrscheinlichkeit gewürfelt wird.

Lösung

Teil a) Bezeichnen wir die zwölf aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen, die bei der Beschriftung der beiden Würfel verwendet werden, mit $k, k+1, \dots, k+11$, so muss

$$k + (k+1) + \dots + (k+11) = 12k + 66 = 2 \cdot 57 = 114$$

und damit $k = 4$ gelten. Zur Beschriftung können also höchstens die Zahlen 4, 5, ..., 15 verwendet werden. Es bleibt zu prüfen, ob sich diese Zahlen so verteilen lassen, dass die Summe der Zahlen auf jedem der beiden Würfel gleich ist.

Dies ist in der Tat möglich; man kann beispielsweise A mit 7, 8, 9, 10, 11, 12 und B mit 4, 5, 6, 13, 14, 15 beschriften.

Teil b) Angenommen, A ist mit den Zahlen $a_1 < a_2 < \dots < a_6$ beschriftet und B mit den Zahlen $b_1 < b_2 < \dots < b_6$, wobei, wie in Teil a) gezeigt,

$$\{a_1, \dots, a_6, b_1, \dots, b_6\} = \{4, 5, \dots, 15\} \text{ und } a_1 + \dots + a_6 = b_1 + \dots + b_6 = 57$$

gilt.

Im Ergebnis eines gemeinsamen Wurfs der Würfel A und B werden die Zahlen (a_i, b_j) angezeigt. Aus der Gesamtheit der 36 möglichen und gleichwahrscheinlichen Wurfresultate (i, j) , $i = 1, \dots, 6$, $j = 1, \dots, 6$ sind diejenigen günstig im Sinne der Aufgabenstellung, bei denen $a_i > b_j$ ist. Wir bestimmen deshalb die Anzahl z der Paare (i, j) mit $a_i > b_j$.

Derartige Paare mit $i = 1$ gibt es genau $a_1 - 4$. In der Tat, ist $a_1 = 4$, so gilt stets $a_1 < b_j$, aber auch $a_1 - 4 = 0$. Ist $a_1 > 4$, so ist $b_1 = 4$ und genau für alle Paare $(1, j)$ mit $b_j \in \{4, 5, \dots, a_1 - 1\}$ gilt $a_1 > b_j$.

Solche Paare mit $i = 2$ gibt es genau $a_2 - 5$, nämlich diejenigen Paare $(2, j)$, für die

$$b_j \in \{4, 5, \dots, a_1 - 1, a_1 + 1, \dots, a_2 - 1\}$$

gilt. Führt man diese Überlegungen fort, so ergibt sich

$$z = (a_1 - 4) + (a_2 - 5) + \dots + (a_6 - 9) = 57 - 39 = 18.$$

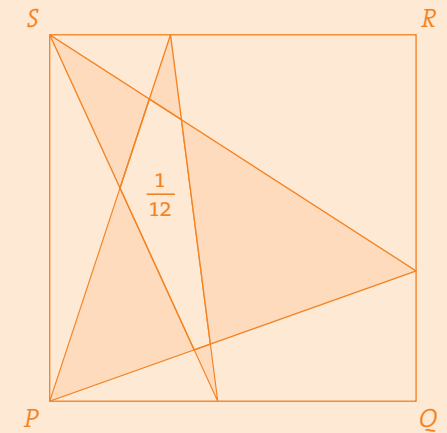
Von den 36 möglichen und gleichwahrscheinlichen Wurfresultaten sind also genau 18 günstig im Sinne der Aufgabenstellung. Die Wahrscheinlichkeit, bei einem Wurf mit A eine höhere Zahl zu erzielen als bei einem Wurf mit B , ist also genau gleich $\frac{1}{2}$.

Aufgabe 1 57. MO / 1. Stufe

Die Ecken eines fünfzackigen Sterns liegen so auf den Seiten eines Quadrates $PQRS$ mit der Seitenlänge 1, dass zwei Ecken des Sterns mit den Eckpunkten P und S übereinstimmen und im Inneren der Seiten \overline{PQ} , \overline{QR} und \overline{RS} jeweils ein weiterer Eckpunkt des Sterns liegt, siehe nebenstehende Abbildung.

Der Flächeninhalt des mittleren Fünfecks beträgt $\frac{1}{12}$.

Man berechne die Summe der Flächeninhalte der grau gefärbten Dreiecke.



Lösung

Die Eckpunkte des fünfzackigen Sterns sind $A = S$, B , C , $D = P$ und E . Mit Kleinbuchstaben sind jeweils die Flächeninhalte der Dreiecke bezeichnet, in denen sich der Buchstabe befindet (vergleiche nachfolgende Abbildung). Da die Dreiecke ABC und ADC dieselbe Grundseite \overline{AC} und die gleiche Höhe zu dieser Grundseite haben, sind sie flächengleich. Daraus folgt, dass

$$f + a + g = a + g + c + b + \frac{1}{12}, \text{ also } b + c = f - \frac{1}{12}$$

gilt.

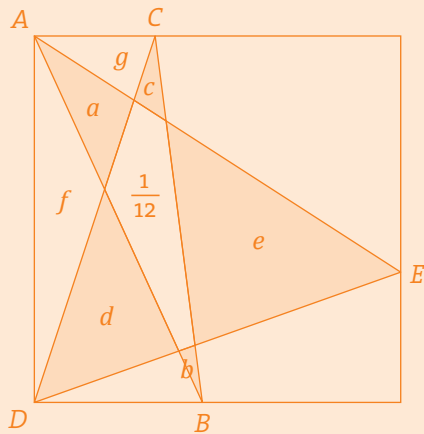
Im Dreieck ADE haben die Grundseite AD und die zugehörige Höhe die Länge 1, also hat das Dreieck ADE den Flächeninhalt $\frac{1}{2}$. Daraus folgt

$$a + d + e + f + \frac{1}{12} = \frac{1}{2}, \text{ also } a + d + e + f = \frac{5}{12}$$

und weiter

$$a + b + c + d + e = a + d + e + (b + c) = a + d + e + f - \frac{1}{12} = \frac{5}{12} - \frac{1}{12} = \frac{1}{3}.$$

Die Summe der Flächeninhalte der grau gefärbten Dreiecke beträgt $\frac{1}{3}$.



Aufgabe 2 56. MO / 2. Stufe

Für welche positiven ganzen Zahlen n gibt es eine Quadratzahl, deren letzte n Ziffern in der Dezimaldarstellung sämtlich gleich 4 sind?

Lösung

Es gibt nur für $n = 1, 2, 3$ solche Quadratzahlen.

Man findet $2^2 = 4$, $12^2 = 144$ und $38^2 = 1444$. Es wird indirekt gezeigt, dass für $n = 4$ keine solche Quadratzahl existiert, wodurch sofort auch $n > 4$ ausgeschlossen ist.

Angenommen, es gäbe eine Quadratzahl k^2 , deren letzte 4 Ziffern gleich 4 sind. Dann lässt sich

$$k^2 = 10^4 \cdot a + 4444$$

mit einer ganzen Zahl a schreiben. Wegen $4 \mid k^2$ ist dann auch $\frac{k^2}{4} = \left(\frac{k}{2}\right)^2$ das Quadrat einer positiven ganzen Zahl. Es folgt

$$\frac{k^2}{4} = \frac{10^4}{4} \cdot a + 1111 = 25 \cdot 10^2 \cdot a + 11 \cdot 100 + 11,$$

die Quadratzahl $\frac{k^2}{4}$ endet also in Dezimaldarstellung auf die Ziffern 11. Die Zahl $\frac{k}{2}$ muss in Dezimaldarstellung auf eine der Ziffern 1 oder 9 enden, denn die letzte Ziffer von $\frac{k^2}{4}$ ist gleich 1. Folglich gilt $\frac{k}{2} = 10b \pm 1$ mit einer ganzen Zahl b und

$$\left(\frac{k}{2}\right)^2 = 100b^2 \pm 20b + 1.$$

Somit hat $\frac{k^2}{4}$ eine gerade Zehnerziffer, kann also nicht auf 11 enden. Die Existenz einer Quadratzahl im Sinne der Aufgabenstellung ist damit für $n \geq 4$ ausgeschlossen.

Aufgabe 3 56. MO / 3. Stufe

Man bestimme die kleinste Primzahl, die sich nicht in der Form $|2^a - 3^b|$ mit nichtnegativen ganzen Zahlen a und b darstellen lässt.

Lösung

Man stellt zunächst fest, dass jede Primzahl $p < 41$ eine solche Darstellung erlaubt. Die folgende Tabelle gibt hierfür jeweils ein Beispiel an.

p	$ 2^a - 3^b $	p	$ 2^a - 3^b $	p	$ 2^a - 3^b $	p	$ 2^a - 3^b $
2	$3^1 - 2^0$	7	$2^3 - 3^0$	17	$3^4 - 2^6$	29	$2^5 - 3^1$
3	$2^2 - 3^0$	11	$3^3 - 2^4$	19	$3^3 - 2^3$	31	$2^5 - 3^0$
5	$3^2 - 2^2$	13	$2^4 - 3^1$	23	$3^3 - 2^2$	37	$2^6 - 3^3$

Wir zeigen nun, dass 41 keine derartige Darstellung besitzt. Dazu gehen wir indirekt vor und nehmen an,

$$41 = |2^a - 3^b|$$

wäre eine solche Darstellung. Da 42 keine Zweierpotenz ist, gilt sicher $b \neq 0$. Ebenso sind auch 42, 43 und 45 jeweils keine Dreierpotenzen, weshalb $a \neq 0, 1, 2$ gelten muss. Somit ist $a \geq 3$ und $b \geq 1$.

Wir betrachten nun die Reste von $|2^a - 3^b|$ bei Division durch 8 und 3. Wegen $a \geq 3$ gilt $2^a \equiv 0 \pmod{8}$. Die Gleichung $2^a - 3^b = \pm 41$ impliziert damit unmittelbar

$$3^b \equiv \mp 1 \pmod{8}.$$

Dreierpotenzen mit geradem Exponenten lassen nun bei Division durch 8 immer den Rest 1 und solche mit ungeradem Exponenten den Rest 3. Folglich muss $3^b \equiv 1 \pmod 8$ sein, und es gilt $2^a - 3^b = -41$ mit einer geraden Zahl b .

Diese Gleichung impliziert nun wegen $b \geq 1$ und $3^b \equiv 0 \pmod 3$ ihrerseits $2^a \equiv -41 \pmod 3$, also

$$2^a \equiv 1 \pmod 3.$$

Da Zweierpotenzen mit geradem Exponenten bei Division durch 3 immer den Rest 1 lassen und solche mit ungeradem Exponenten den Rest 2, muss a ebenfalls eine gerade Zahl sein.

Existiert also eine Darstellung der in der Aufgabenstellung verlangten Art für 41, so muss sie von der Form

$$41 = 3^{2d} - 2^{2c} = (3^d - 2^c)(3^d + 2^c)$$

mit positiven ganzen Zahlen c und d sein. Da 41 eine Primzahl ist, ist dabei notwendigerweise der erste Faktor gleich 1 und der zweite gleich 41. Hieraus folgt aber sofort

$$2 \cdot 3^d = (3^d - 2^c) + (3^d + 2^c) = 1 + 41 = 42$$

und damit ein Widerspruch zu der Tatsache, dass 21 keine Dreierpotenz ist.

Damit ist bewiesen, dass 41 die kleinste Primzahl ist, die sich nicht in der Form $|2^a - 3^b|$ mit nichtnegativen ganzen Zahlen a und b darstellen lässt.

Bemerkungen: 1. Die Darstellbarkeit der ersten zwölf Primzahlen in der Form $|2^a - 3^b|$ täuscht. Ein Computerexperiment zeigt, dass mit $a, b \leq 10000$ nur die folgenden Darstellungen von Primzahlen kleiner 1000 möglich sind. Es fällt dabei vor allem auf, dass in Wirklichkeit keine Exponenten größer als 11 auftreten.

p	$ 2^a - 3^b $	p	$ 2^a - 3^b $	p	$ 2^a - 3^b $
2	$3^1 - 2^0$	37	$2^6 - 3^3$	229	$2^8 - 3^3$
3	$2^2 - 3^0$	47	$2^7 - 3^4$	239	$3^5 - 2^2$
5	$2^3 - 3^1 = 3^2 - 2^2 = 2^5 - 3^3$	61	$2^6 - 3^1$	241	$3^5 - 2^1$
7	$2^3 - 3^0 = 3^2 - 2^1 = 2^4 - 3^2$	73	$3^4 - 2^3$	269	$2^9 - 3^5$
11	$3^3 - 2^4$	79	$3^4 - 2^1$	431	$2^9 - 3^4$
13	$2^4 - 3^1 = 2^8 - 3^5$	101	$2^7 - 3^3$	503	$2^9 - 3^2$
17	$3^4 - 2^6$	127	$2^7 - 3^0$	509	$2^9 - 3^1$
19	$3^3 - 2^3$	139	$3^7 - 2^{11}$	601	$3^6 - 2^7$
23	$3^3 - 2^2 = 2^5 - 3^2$	179	$3^5 - 2^6$	727	$3^6 - 2^1$
29	$2^5 - 3^1$	211	$3^5 - 2^5$	997	$2^{10} - 3^3$
31	$2^5 - 3^0$	227	$3^5 - 2^4$		

2. Die Argumentation modulo 3 und 8 wie in der Lösung funktioniert prinzipiell für alle Zahlen, die bei Division durch 24 den Rest 7 oder 17 lassen.

Nichtsdestotrotz erlauben die Zahlen 7, 17, 31, 79, 127 und 727 Darstellungen der Form $|2^a - 3^b|$, davon 7 sogar drei verschiedene. Möglich wird dies in drei Fällen durch $a = 1$, in weiteren dreien durch $b = 0$ sowie durch die trivialen Faktorisierungen

$$17 = (3^2 - 2^3) (3^2 + 2^3) = 1 \cdot 17 \text{ und}$$

$$7 = (2^2 - 3^1) (2^2 + 3^1) = 1 \cdot 7,$$

wobei dann auch notwendigerweise $17 + 1$ das Doppelte einer Dreierpotenz und $7 + 1$ (das Doppelte) eine(r) Zweierpotenz ist. Die Begründung dafür, dass auf der anderen Seite $161 = 2 \cdot 3^4 - 1$ und $127 = 2 \cdot 2^6 - 1$ keine trivialen Faktorisierungen haben, erfordert nur minimal mehr Aufwand als oben.

Aufgabe 4 56. MO / 4. Stufe

Man zeige, dass unendlich viele positive ganze Zahlen m existieren, für die es m aufeinanderfolgende Quadratzahlen gibt, deren Summe gleich m^3 ist, und gebe eine Lösung mit $m > 1$ an.

Lösung

Für eine solche Zahl m seien die m aufeinanderfolgenden Zahlen die Zahlen $n + 1$ bis $n + m$. Mit der bekannten Summenformel für Quadratzahlen

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

erhält man aus der Problemstellung nacheinander die (wegen $m > 0$) äquivalenten Gleichungen

$$m^3 = \frac{(n+m)(n+m+1)(2n+2m+1)}{6} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$6m^3 = 2m^3 + (6n+3)m^2 + (6n^2+6n+1)m,$$

$$0 = -4m^2 + 6n^2 + 6mn + 3m + 6n + 1.$$

Um die linearen Terme zu eliminieren, formt man weiter um:

$$\begin{aligned}
0 &= -4m^2 + 6n^2 + 6mn + 3m + 6n + 1 \\
&= -4m^2 + 6\left(n + \frac{m}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}m^2 + 3m + 6n + 1 \\
&= -\frac{11}{2}m^2 + 6\left(n + \frac{m}{2}\right)^2 + 6\left(n + \frac{m}{2}\right) + 1 \\
&= -\frac{11}{2}m^2 + 6\left(n + \frac{m}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} + 1
\end{aligned}$$

$$0 = -11m^2 + 3(2n + m + 1)^2 - 1$$

Mit der Substitution $k = 2n + m + 1$ werden also Lösungen von

$$3k^2 - 11m^2 = 1 \tag{1}$$

in ganzen Zahlen gesucht. Diese Gleichung erinnert an eine Pell-Gleichung und hat die Lösung $m = 1, k = 2$. Findet man eine weitere Lösung, so lässt sich mit dieser eine Rekursionsvorschrift zur Berechnung beliebig vieler Lösungen aufstellen

Durch die Substitution $l = 3k$ wird die Gleichung (1) zunächst in eine Pell-Gleichung umgeformt,

$$9k^2 - 33m^2 = 3,$$

$$l^2 - 33m^2 = 3. \tag{2}$$

Damit auch k ganzzahlig ist, werden Lösungen von Gleichung (2) mit $3 \mid l$ gesucht. Eine solche Lösung ist $(l, m) = (6, 1)$. Um daraus weitere Lösungen zu konstruieren, verwendet man eine nicht-triviale Lösung von

$$p^2 - 33q^2 = 1.$$

Man findet $(23, 4)$. Damit lässt sich (2) äquivalent umformen:

$$(l^2 - 33m^2)(23^2 - 33 \cdot 4^2) = 3,$$

$$(l + \sqrt{33}m)(l - \sqrt{33}m)(23 + \sqrt{33} \cdot 4)(23 - \sqrt{33} \cdot 4) = 3,$$

$$(l + \sqrt{33}m)(23 + \sqrt{33} \cdot 4)(l - \sqrt{33}m)(23 - \sqrt{33} \cdot 4) = 3,$$

$$(23l + 33 \cdot 4m + (4l + 23m)\sqrt{33})(23l + 33 \cdot 4m - (4l + 23m)\sqrt{33}) = 3,$$

$$(23l + 132m)^2 - 33 \cdot (4l + 23m)^2 = 3.$$

Ist also das Paar (l, m) eine Lösung von (2), so gilt dies auch für $(23l + 132m, 4l + 23m)$. Man beachte dabei, dass $3 \mid l$ tatsächlich $3 \mid 23l + 132m$ impliziert. Mit $l = 3k$ erhalten wir für k und m die Rekursionsvorschrift

$$(k, m) \rightarrow (23k + 44m, 12k + 23m),$$

die aus $(k, m) = (2, 1)$ die Lösung $(90, 47)$ liefert. Aus $k = 2n + m + 1$ erhält man dann $n = 21$. Also ist eine (die zweitkleinste) Lösung

$$\underbrace{22^2 + 23^2 + \dots + 68^2}_{47 \text{ Summanden}} = 47^3.$$

Da die Rekursion unverändert m ungerade und k gerade lässt, ist auch n immer ganzzahlig. Damit ist bewiesen, dass es unendlich viele positive ganze Zahlen m gibt, die der Bedingung der Aufgabenstellung genügen.

Träger und Förderer

Träger der Mathematik-Olympiade in Deutschland ist der Verein Mathematik-Olympiaden e. V., der 1994 mit Sitz in Rostock gegründet wurde. Erster Vorsitzender des Vereins ist Prof. Dr. Jürgen Prestin, Universität zu Lübeck.

Der Verein ist verantwortlich für den Aufgabenausschuss, das zentrale Gremium der Mathematik-Olympiade, der den einzelnen Olympiade- und Altersstufen gemäße Aufgaben ehrenamtlich erarbeitet und zur Verfügung stellt. Die über 50 Mitglieder des Aufgabenausschusses sind Mathematikerinnen und Mathematiker bundesweit aus Schule, Universität und Wirtschaft. Damit ist gewährleistet, dass die Aufgaben den Lehrplänen der einzelnen Bundesländer angepasst sind. Gemeinsam mit dem jeweiligen regionalen Veranstalter führt der Mathematik-Olympiaden e. V. die Bundesrunden durch. Seit einigen Jahren werden diese in erheblichem Umfang durch die Hector-Stiftung II finanziell unterstützt.

Die Geschäftsstelle, die Bundesrunde und die Arbeit des Aufgabenausschusses der Mathematik-Olympiade in Deutschland werden vom Bundesministerium für Bildung und Forschung gefördert. Die Geschäftsstelle wird von Bildung & Begabung gemeinnützige GmbH im Verbund der Bundesweiten Mathematik-Wettbewerbe geführt.

Bildung & Begabung ist das Talentförderzentrum des Bundes und der Länder. Seine Wettbewerbe und Akademien helfen Jugendlichen, ihre Stärken zu entfalten – unabhängig davon, auf welche Schule sie gehen oder aus welcher Kultur sie stammen. Außerdem unterstützt Bildung & Begabung Lehrer, Eltern und Schüler mit umfangreichen Informations- und Vernetzungsangeboten wie der Fachtagung „Perspektive Begabung“ oder dem Online-Portal www.begabungslotse.de. Bildung & Begabung ist eine Tochter des Stifterverbandes. Förderer sind das Bundesministerium für Bildung und Forschung und die Kultusministerkonferenz. Schirmherr ist der Bundespräsident.

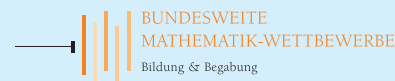
Mathematik-Olympiaden e. V.

c/o Universität zu Lübeck
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Jürgen Prestin
1. Vorsitzender des Mathematik-Olympiaden e. V.
Ratzeburger Allee 160
23562 Lübeck
verein@mathematik-olympiaden.de

Geschäftsstelle

Mathematik-Olympiade in Deutschland
Geschäftsstelle
Bildung & Begabung gemeinnützige GmbH
Kortrijker Straße 1
53177 Bonn
0228/9 59 15 25
mo@mathe-wettbewerbe.de

www.mathematik-olympiaden.de



GEFÖRDERT VOM



