

Die Aufgaben der 1. Runde 2020

Aufgabe 1

Beweise: Es gibt unendlich viele Quadratzahlen der Form $50^m - 50^n$, aber keine Quadratzahl der Form $2020^m + 2020^n$; dabei sind m und n positive ganze Zahlen.



Aufgabe 2

Konstantin zieht auf einem $n \times n$ -Schachbrett ($n \geq 3$) mit einem Springer mit möglichst wenigen Zügen vom Feld in der unteren linken Ecke auf das Feld in der unteren rechten Ecke. Danach nimmt Isabelle diesen Springer und zieht von dem Feld in der unteren linken Ecke mit möglichst wenigen Zügen auf das Feld in der oberen rechten Ecke.

Für welche n benötigen beide dafür gleich viele Züge?

Hinweis: Der Springer darf nur wie im Schachspiel üblich gezogen werden.



Aufgabe 3

Die Strecke AB sei der Durchmesser eines Kreises k und E ein Punkt im Innern von k .

Die Gerade AE schneide k außer in A noch im Punkt C , die Gerade BE schneide k außer in B noch im Punkt D .

Beweise: Der Wert von $\overline{AC} \cdot \overline{AE} + \overline{BD} \cdot \overline{BE}$ ist unabhängig von der Lage von E .



Aufgabe 4

Die Folge (a_n) ist rekursiv definiert durch $a_1 = 0, a_2 = 2, a_3 = 3$ sowie $a_n = \max_{0 < d < n} a_d \cdot a_{n-d}$ für $n \geq 4$. Bestimme die Primfaktorzerlegung von $a_{19702020}$.

Hinweis: Der Ausdruck $\max_{0 < d < n} a_d \cdot a_{n-d}$ bezeichnet den größten Wert aller Zahlen $a_1 \cdot a_{n-1}, a_2 \cdot a_{n-2}, \dots, a_{n-1} \cdot a_1$.

