

Die Aufgaben der 2. Runde 2018

Aufgabe 1

Anja und Bernd nehmen abwechselnd Steine von einem Haufen mit anfangs n Steinen ($n \geq 2$). Anja beginnt und nimmt in ihrem ersten Zug wenigstens einen, aber nicht alle Steine weg. Danach nimmt, wer am Zug ist, mindestens einen, aber höchstens so viele Steine weg, wie im unmittelbar vorhergehenden Zug weggenommen wurden. Wer den letzten Stein wegnimmt, gewinnt. Bei welchen Werten von n kann Anja den Gewinn erzwingen, bei welchen kann es Bernd? Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.



Aufgabe 2

Wir betrachten alle reellen Funktionen f mit der Eigenschaft $f(1 - f(x)) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

- Weise die Existenz einer solchen Funktion durch Angabe eines konkreten Beispiels nach.
- Wir definieren für jede solche Funktion f die Summe

$$S_f = f(-2017) + f(-2016) + \dots + f(-1) + f(0) + f(1) + \dots + f(2017) + f(2018).$$

Bestimme die Menge aller Werte, die derartige Summen S_f annehmen können.

Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.



Aufgabe 3

Gegeben sind eine Strecke AB und auf ihr ein Punkt T , wobei T näher an B liegt als an A .

Zeige, dass es zu jedem von T verschiedenen Punkt C auf der Senkrechten zur Strecke AB durch T jeweils genau einen Punkt D auf der Strecke AC mit $\angle CBD = \angle BAC$ gibt und dass dann das Lot zu AC durch D stets durch ein und denselben, von der Wahl von C unabhängigen Punkt E auf der Geraden AB geht.



Aufgabe 4

Bestimme alle natürlichen Zahlen n mit $n > 1$, für die gilt:

Färbt man jeden Gitterpunkt eines quadratischen Gitters in der Ebene mit je einer von n vorgegebenen Farben, dann gibt es immer drei Gitterpunkte gleicher Farbe, die ein gleichschenkelig-rechtwinkliges Dreieck bilden, dessen Katheten parallel zu den Gitterlinien sind.

Erläuterung: Die Gitterpunkte eines quadratischen Gitters sind diejenigen Punkte in einem kartesischen Koordinatensystem (d.h. einem Koordinatensystem, bei dem die Achsen senkrecht aufeinander stehen und bei dem die Längeneinheiten auf beiden Achsen gleich sind), bei denen beide Koordinaten ganzzahlig sind. Gitterlinien sind die Geraden, die durch Gitterpunkte gehen und parallel zu einer der beiden Achsen sind.

