BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK
Bildung & Begabung

# Die Aufgaben der 1. Runde 2017

## Aufgabe 1

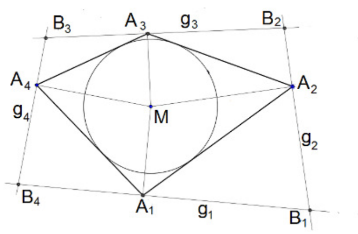
Die Zahlen 1, 2, 3, ..., 2017 stehen an der Tafel. Amelie und Boris wischen abwechselnd je eine dieser Zahlen weg, bis nur noch zwei Zahlen übrig bleiben. Amelie beginnt. Wenn die Summe der beiden letzten Zahlen durch 8 teilbar ist, gewinnt Amelie, ansonsten Boris.
Wer kann den Gewinn erzwingen?

## Aufgabe 2

Wie viele spitze Innenwinkel kann ein überschneidungsfreies ebenes 2017–Eck höchstens haben?

## Aufgabe 3

In einem konvexen Tangentenviereck $A_1A_2A_3A_4$ sei $M$ der Mittelpunkt des Inkreises, der die Seiten des Vierecks berührt. Weiter sei $g_1$ die Gerade durch $A_1$, die senkrecht auf der Strecke $A_1M$ steht; entsprechend seien $g_2$, $g_3$ und $g_4$ festgelegt. Die Geraden $g_1$, $g_2$, $g_3$ und $g_4$ bestimmen ein weiteres Viereck $B_1B_2B_3B_4$, wobei $B_1$ der Schnittpunkt von $g_1$ und $g_2$ ist; entsprechend bezeichnet $B_2$, $B_3$ bzw. $B_4$ den Schnittpunkt von $g_2$ und $g_3$, $g_3$ und $g_4$ bzw. $g_4$ und $g_1$.




Beweise, dass sich die Diagonalen des Vierecks $B_1B_2B_3B_4$ im Punkt $M$ schneiden.

## Aufgabe 4

Die Zahlenfolge $a_0$, $a_1$, $a_2$, ... sei rekursiv definiert durch die Vorschrift

$$a_0 := 1 \quad \text{und} \quad a_n := a_{n-1} \cdot \left(4 - \frac{2}{n}\right) \text{ für } n \geq 1.$$

Beweise, dass für jedes $n \geq 1$ gilt:

a) $a_n$ ist eine natürliche Zahl.
b) Jede Primzahl $p$ mit $n < p \leq 2n$ ist Teiler von $a_n$.
c) Wenn $n$ eine Primzahl ist, dann ist $a_n - 2$ durch $n$ teilbar.