BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK
Bildung & Begabung

Die Aufgaben der 2. Runde 2015

Aufgabe 1

Ein Rechteck mit Seitenlängen a und b wird in $a \cdot b$ Einheitsquadrate aufgeteilt (a, b sind positive ganze Zahlen, beide gerade).
Anja und Bernd färben nun abwechselnd jeweils ein Quadrat, das aus einem oder mehreren bislang noch ungefärbten Einheitsquadraten dieses Rechtecks besteht. Wer nicht mehr färben kann, hat verloren.
Anja beginnt. Bestimme alle Paare (a,b), für die sie den Gewinn erzwingen kann.

Aufgabe 2

Die Dezimaldarstellung eines Bruches $\frac{m}{n}$ mit positiven ganzen Zahlen m und n enthält irgendwo nach dem Komma die Ziffernfolge 7143.
Zeige, dass $n > 1250$ ist.

Aufgabe 3

Jede der positiven ganzen Zahlen $1, 2, \ldots, n$ wird entweder rot oder blau oder gelb gefärbt, wobei folgende Regeln eingehalten werden:
(1) Eine Zahl und die nächstgrößere Zahl gleicher Farbe (falls es eine solche gibt) haben stets verschiedene Parität.
(2) Wenn jede Farbe bei der Färbung verwendet wird, dann gibt es genau eine Farbe, für die die kleinste Zahl in dieser Farbe gerade ist.
Bestimme die Anzahl solcher Färbungen.

Aufgabe 4

Es sei ABC ein Dreieck, bei dem der Inkreismittelpunkt I und Umkreismittelpunkt U verschieden sind. Für jeden Punkt X im Innern dieses Dreiecks sei d(X) die Summe der Abstände von X zu den drei (evtl. geradlinig verlängerten) Dreieckseiten.
Beweise: Wenn für zwei verschiedene Punkte P und Q im Innern des Dreiecks ABC die Bedingung d(P) = d(Q) erfüllt ist, dann stehen die Geraden PQ und UI senkrecht aufeinander.