BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK
Bildung & Begabung

# Die Aufgaben der 2. Runde 2012

## Aufgabe 1

Aus der Menge $\{1, 2, 3, ..., 2n\}$ werden $n$ Zahlen ausgewählt und in aufsteigender Reihenfolge mit $a_1, a_2, ..., a_n$ bezeichnet, danach werden die restlichen $n$ Zahlen in absteigender Reihenfolge mit $b_1, b_2, ..., b_n$ benannt. Für diese $2n$ Zahlen gilt also $a_1 < a_2 < ... < a_n$ und $b_1 > b_2 ... > b_n$.

Beweise, dass dann stets gilt: $|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + ... + |a_n - b_n| = n^2$.

## Aufgabe 2

Auf einem runden Tisch sind $n$ Schalen im Kreis angeordnet. Anja geht im Uhrzeigersinn um den Tisch und legt dabei nach folgender Regel Murmeln in die Schalen:

Sie legt in eine beliebige erste Schale eine Murmel, dann geht sie eine Schale weiter und legt dort eine Murmel hinein. Anschließend geht sie zwei Schalen weiter, bevor sie wieder eine Murmel legt, danach geht sie drei Schalen weiter usw. Wenn in jeder Schale mindestens eine Murmel liegt, hört sie auf.

Für welche $n$ tritt dies ein?

## Aufgabe 3

Der Inkreis des Dreiecks ABC berührt die Seiten BC, CA und AB in den Punkten $A_1$, $B_1$ bzw. $C_1$. Der Punkt D sei das Bild des Punktes $C_1$ bei der Spiegelung am Mittelpunkt des Inkreises. Schließlich sei E der Schnittpunkt der Geraden $B_1C_1$ und $A_1D$.

Beweise, dass die Strecken CE und $CB_1$ gleiche Länge haben.

## Aufgabe 4

In ein rechtwinkliges Koordinatensystem soll ein Rechteck mit den Seitenlängen $a$ und $b$ mit $a \leq b$ so gelegt werden, dass sich kein Punkt mit ganzzahligen Koordinaten in seinem Inneren oder auf seinem Rand befindet.

Unter welcher notwendigen und zugleich hinreichenden Bedingung für $a$ und $b$ ist dies möglich?