Die Aufgaben der 1. Runde 2011

Aufgabe 1

Zehn Schalen stehen im Kreis. Sie werden – irgendwo beginnend - im Uhrzeigersinn mit 1, 2, 3, ..., 9 bzw. 10 Murmeln gefüllt. In einem Zug darf man zu zwei benachbarten Schalen je eine Murmel hinzufügen oder aus zwei benachbarten Schalen – wenn sie beide nicht leer sind – je eine Murmel entfernen.

Kann man erreichen, dass nach endlich vielen Zügen in jeder Schale genau 2011 Murmeln liegen?

Aufgabe 2

An einem runden Tisch sitzen 16 Kinder. Nach der Pause setzen sie sich wieder an den Tisch. Dabei stellen sie fest: Jedes Kind sitzt entweder auf seinem ursprünglichen Platz oder auf einem der beiden benachbarten Plätze.

Wie viele Sitzordnungen sind auf diese Weise nach der Pause möglich?

Aufgabe 3

Die Diagonalen eines konvexen Fünfecks teilen jeden seiner Innenwinkel in drei gleich große Teile.

Folgt hieraus, dass das Fünfeck regelmäßig ist?

Aufgabe 4

Es seien a und b positive ganze Zahlen. Bekanntlich liefert die Division mit Rest von $a \cdot b$ durch $a + b$ eindeutig bestimmte ganze Zahlen q und r mit $a \cdot b = q(a+b) + r$ und $0 \leq r < a+b$.

Bestimme alle Paare (a,b), für die $q^2 + r = 2011$ gilt.