Bundeswettbewerb Mathematik

Die Aufgaben der 2. Runde 2010

Aufgabe 1

Es seien a, b, c die Seitenlängen eines nicht entarteten Dreiecks mit $a \leq b \leq c$. Mit t(a,b,c) werde das Minimum der Quotienten $\frac{b}{a}$ und $\frac{c}{b}$ bezeichnet.

Bestimme alle Werte, die t(a,b,c) annehmen kann.

Aufgabe 2

Die Zahlenfolge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sei rekursiv definiert durch

$$a_1 := 1,\ a_{n+1} := [\sqrt{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}\,] \quad \text{für } n \geq 1.$$

Bestimme alle Zahlen, die mehr als zweimal als Folgenglieder auftreten.

Erläuterung: Mit [z] sei die größte ganze Zahl bezeichnet, die nicht größer als z ist.

Aufgabe 3

Gegeben sei ein spitzwinkliges Dreieck ABC. Der Fußpunkt der Höhe h_c sei mit D bezeichnet, ferner sei E ein beliebiger Punkt auf der Strecke CD. Schließlich seien P, Q, R und S die Fußpunkte der Lote von D auf die Geraden AC, AE, BE bzw. BC.

Beweise: Die Punkte P, Q, R und S liegen entweder auf einem Kreis oder auf einer Geraden.

Aufgabe 4

Im Folgenden sei mit $\mathbb{N}_0$ die Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen bezeichnet.

Bestimme alle Polynome p, die die beiden folgenden Eigenschaften erfüllen:

(1) Alle Koeffizienten von p sind aus $\mathbb{N}_0$.

(2) Es gibt eine Funktion f, die auf $\mathbb{N}_0$ definiert ist und nur Zahlen aus $\mathbb{N}_0$ als Werte annimmt und die $f(f(f(n))) = p(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ erfüllt.