Bundeswettbewerb Mathematik

Die Aufgaben der 2. Runde 2009

Aufgabe 1

Zu Beginn eines Spiels liegen in drei Kisten 2008, 2009 bzw. 2010 Spielsteine.
Anja und Bernd führen Spielzüge abwechselnd nach folgender Regel durch:
Wer am Zug ist, wählt zwei Kisten aus, entleert sie und verteilt danach die Spielsteine aus der dritten Kiste neu auf die drei Kisten, wobei keine Kiste leer bleiben darf.

Wer keinen vollständigen Spielzug mehr ausführen kann, hat verloren. Wer kann den Gewinn erzwingen, wenn Anja anfängt?

Aufgabe 2

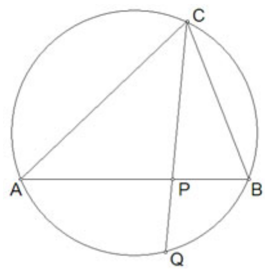
Es sei n eine ganze Zahl, die größer als 1 ist.

Beweise, dass die beiden folgende Aussagen äquivalent sind:

(A) Es gibt positive ganze Zahlen a,b und c, die nicht größer als n sind und für die das Polynom ax^2+bx+c zwei verschiedene reelle Nullstellen x_1 und x_2 mit $|x_2 - x_1| \leq \frac{1}{n}$ besitzt.

(B) Die Zahl n hat mindestens zwei verschiedene Primteiler.

Aufgabe 3



Gegeben seien ein Dreieck ABC und ein Punkt P auf der Seite AB. Ferner sei Q der von C verschiedene Schnittpunkt der Geraden CP mit dem Umkreis des Dreiecks.

Beweise, dass die Ungleichung

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{CQ}} \leq \left(\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}+\overline{CB}}\right)^2$$

gilt und dass Gleichheit genau dann besteht, wenn CP die Winkelhalbierende des Winkels ACB ist.

Aufgabe 4

Wie viele Diagonalen kann man in ein konvexes 2009-Eck höchstens einzeichnen, wenn in der fertigen Zeichnung jede gezeichnete Diagonale im Inneren des 2009-Ecks höchstens eine weitere gezeichnete Diagonale schneiden darf?