



## Die Aufgaben der 2. Runde 2008

### Aufgabe 1

Man bestimme alle reellen Lösungen der Gleichung

$$\sqrt[5]{x^3 + 2x} = \sqrt[3]{x^5 - 2x} .$$

Dabei sei – im Unterschied zu manchen Definitionen in der Fachliteratur – für eine ungerade ganze Zahl  $n > 1$  die Wurzel  $\sqrt[n]{a}$  auch für negative reelle Radikanden  $a$  erklärt: Sie sei diejenige reelle Zahl  $b$ , für die  $b^n = a$  ist.

### Aufgabe 2

Die positiven ganzen Zahlen  $a$ ,  $b$  und  $c$  seien so gewählt, dass auch die Quotienten  $\frac{bc}{b+c}$ ,  $\frac{ca}{c+a}$  und  $\frac{ab}{a+b}$  ganzzahlig sind.

Man beweise, dass  $a$ ,  $b$  und  $c$  einen gemeinsamen Teiler haben, der größer als 1 ist.

### Aufgabe 3

Durch einen Punkt im Innern einer Kugel werden drei paarweise aufeinander senkrecht stehende Ebenen gelegt. Diese zerlegen die Kugeloberfläche in acht krummlinige Dreiecke. Die Dreiecke werden abwechselnd schwarz und weiß so gefärbt, dass die Oberfläche der Kugel schachbrettartig aussieht.

Man beweise, dass dann genau die Hälfte der Kugeloberfläche schwarz gefärbt ist.

### Aufgabe 4

Auf einem Bücherbord stehen nebeneinander  $n$  Bücher ( $n \geq 3$ ) von lauter unterschiedlichen Autoren. Ein Bibliothekar betrachtet das erste und zweite Buch von links und vertauscht diese beiden genau dann, wenn sie nicht in der alphabetischen Reihenfolge ihrer Autoren stehen. Danach macht er das Gleiche mit dem zweiten und dritten Buch von links u.s.w. Auf diese Weise geht er die Buchreihe insgesamt dreimal von links nach rechts durch.

Bei wie vielen verschiedenen Ausgangsanordnungen der Bücher sind diese dann alphabetisch geordnet?