



Die Aufgaben der 1. Runde 2007

Aufgabe 1

Gegeben sei ein regelmäßiges 2007-Eck.

Die natürlichen Zahlen $1, 2, \dots, 4014$ sollen so auf seine Eckpunkte und Seitenmittelpunkte verteilt werden, dass für jede Seite die Summe der drei Zahlen, die an den Eckpunkten und am Mittelpunkt der Seite stehen, den gleichen Wert hat.

Man zeige, dass eine solche Verteilung möglich ist.

Aufgabe 2

Jede positive ganze Zahl soll entweder rot oder grün so gefärbt werden, dass folgende Eigenschaften bestehen:

- Die Summe dreier nicht notwendig verschiedener roter Zahlen ist eine rote Zahl.
- Die Summe dreier nicht notwendig verschiedener grüner Zahlen ist eine grüne Zahl.
- Es gibt sowohl rote als auch grüne Zahlen.

Man finde alle derartigen Färbungen.

Aufgabe 3

Im Inneren der Seiten AC und BC eines Dreiecks ABC liegen die Punkte E und F so, dass die Strecken AE und BF gleich lang sind und sich die Kreise durch A, C und F bzw. durch B, C und E außer in C in einem weiteren Punkt D schneiden.

Man beweise, dass die Gerade CD den Winkel ACB halbiert.

Aufgabe 4

Es sei a eine positive ganze Zahl.

Wie viele nicht-negative ganzzahlige Lösungen x hat die Gleichung $\left[\frac{x}{a} \right] = \left[\frac{x}{a+1} \right]$?

Erläuterung: Für jede reelle Zahl z wird mit $[z]$ die größte ganze Zahl bezeichnet, die nicht größer als z ist.