Die Aufgaben der 2. Runde 2006

Aufgabe 1

Ein Kreis sei in 2n kongruente Sektoren eingeteilt, von denen n schwarz und die übrigen n weiß gefärbt sind. Die weißen Sektoren werden, irgendwo beginnend, im Uhrzeigersinn mit 1, 2, 3, ..., n nummeriert. Danach werden die schwarzen Sektoren, irgendwo beginnend, gegen den Uhrzeigersinn mit 1, 2, 3, ..., n nummeriert.
Man beweise, dass es n aufeinander folgende Sektoren gibt, in denen die Zahlen 1 bis n stehen.

Aufgabe 2

Man bestimme alle reellwertigen Funktionen f, die auf der Menge der positiven rationalen Zahlen definiert sind, dort positive Funktionswerte besitzen und die die Gleichung

$$f(x)+f(y)+2xy\cdot f(xy)=\frac{f(xy)}{f(x+y)} \quad \text{für alle positiven rationalen } x,\, y$$

erfüllen.

Aufgabe 3

Gegeben seien ein spitzwinkliges Dreieck ABC und ein beliebiger Punkt P im Innern des Dreiecks. Die Lotfußpunkte von P auf die Seiten AB, BC und CA seien C', A' bzw. B'.
Bei welchen Lagen von P gelten $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$ und $\sphericalangle CBA = \sphericalangle C'B'A'$?

Aufgabe 4

Eine positive ganze Zahl heiße *ziffernreduziert*, wenn in ihrer Dezimaldarstellung höchstens neun verschiedene Ziffern vorkommen. (Dabei werden führende Nullen nicht berücksichtigt.)
Es sei M eine endliche Menge ziffernreduzierter Zahlen.
Man beweise, dass die Summe der Kehrwerte der Zahlen aus M kleiner als 180 ist.

Anmerkung: In den Aufgaben 2 und 3 ist die Richtigkeit der Resultate zu beweisen.