Bundeswettbewerb Mathematik

Die Aufgaben der 2. Runde 2005

Aufgabe 1

Zwei Spieler A und B haben auf einem 100×100 – Schachbrett je einen Stein. Sie ziehen abwechselnd ihren Stein, wobei jeder Zug aus einem Schritt senkrecht oder waagerecht auf ein Nachbarfeld besteht und A den ersten Zug ausführt. Zu Beginn liegt der Stein von A in der linken unteren Ecke und der Stein von B in der rechten unteren Ecke.

Man beweise: Der Spieler A kann unabhängig von den Spielzügen des Spielers B stets nach endlich vielen Zügen das Feld erreichen, auf dem gerade der Stein von B steht.

Aufgabe 2

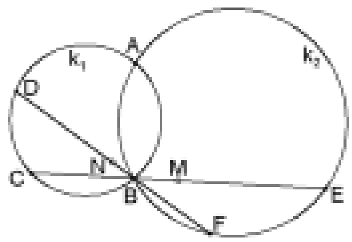
Es sei x eine rationale Zahl.

Man beweise: Es gibt nur endlich viele Tripel (a, b, c) ganzer Zahlen mit $a < 0$ und $b^2 - 4ac = 5$, für die $ax^2 + bx + c$ positiv ist.

Aufgabe 3

Zwei Kreise k_1 und k_2 schneiden sich in A und B. Eine erste Gerade durch B schneide k_1 in C und k_2 in E. Eine zweite Gerade durch B schneide k_1 in D und k_2 in F; dabei liege B zwischen den Punkten C und E sowie zwischen den Punkten D und F.
Schließlich seien M und N die Mittelpunkte der Strecken CE und DF.

Man beweise: Die Dreiecke ACD, AEF und AMN sind zueinander ähnlich.



Aufgabe 4

Es sei A(n) die maximale Anzahl der Selbstüberschneidungen von geschlossenen Streckenzügen $P_1P_2 \ldots P_nP_1$ $(n \geq 3)$, bei denen keine drei der Eckpunkte auf einer Geraden liegen.

Man beweise:

a) $A(n) = \frac{n(n-3)}{2}$, falls n ungerade

und

b) $A(n) = \frac{n(n-4)}{2} + 1$, falls n gerade ist.

Erläuterung: Eine *Selbstüberschneidung* ist ein Schnitt zweier nicht benachbarter Strecken