Die Aufgaben der 2. Runde 2004

Aufgabe 1

Es sei k eine positive ganze Zahl. Eine natürliche Zahl heiße *k-typisch*, wenn jeder ihrer Teiler bei Division durch k den Rest 1 lässt.
Man beweise:

a) Wenn die Anzahl der Teiler einer positiven ganzen Zahl n (einschließlich 1 und n) k-typisch ist, dann ist n die k-te Potenz einer ganzen Zahl.
b) Die Umkehrung der Aussage a) ist falsch, wenn k größer als 2 ist.

Aufgabe 2

Es sei k eine positive ganze Zahl. In einem Kreis mit Radius 1 seien endlich viele Sehnen gezogen. Jeder Durchmesser habe mit höchstens k dieser Sehnen gemeinsame Punkte.
Man beweise, dass die Summe der Längen aller dieser Sehnen kleiner als $k\cdot\pi$ ist.

Aufgabe 3

Gegeben seien zwei Kreise k_1 und k_2, die sich in den beiden verschiedenen Punkten A und B schneiden. Die Tangente an k_2 im Punkt A schneide k_1 außer in A in einem Punkt C_1; entsprechend schneide die Tangente an k_1 im Punkt A den Kreis k_2 in einem weiteren Punkt C_2. Die Gerade (C_1C_2) schließlich schneide k_1 in einem von C_1 und B verschiedenen Punkt D.
Man beweise, dass die Gerade (BD) die Sehne AC_2 halbiert.

Aufgabe 4

Man beweise, dass es unendlich viele Paare (x,y) verschiedener positiver rationaler Zahlen gibt, für die sowohl $\sqrt{x^2+y^3}$ als auch $\sqrt{x^3+y^2}$ rational ist.