Die Aufgaben der 2. Runde 2003

Aufgabe 1

Der Graph einer auf ganz $\mathbb{R}$ definierten reellwertigen Funktion f habe mindestens zwei Symmetriezentren.
Man beweise, dass f sich als Summe einer linearen und einer periodischen Funktion darstellen lässt.

Begriffserläuterungen:

Ein Punkt P heißt *Symmetriezentrum* einer Figur F, wenn jeder Punkt von F bei Spiegelung an P wieder in einen Punkt von F übergeht.
Eine Funktion g heißt *linear*, wenn es reelle Zahlen a, b gibt, so dass die Gleichung $g(x) = ax+b$ für alle x gilt.
Eine Funktion p heißt *periodisch*, wenn es eine positive reelle Zahl k gibt, so dass $p(x) = p(x+k)$ für alle x gilt.

Aufgabe 2

Die Zahlenfolge $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ sei rekursiv definiert durch:

$$a_1 := 1,\ a_2 := 1,\ a_3 := 2 \text{ und } a_{n+3} := \frac{1}{a_n}\cdot(a_{n+1} \cdot a_{n+2} + 7) \quad \text{für } n > 0.$$

Man beweise, dass alle Folgenglieder ganzzahlig sind.

Aufgabe 3

Gegeben sei ein konvexes Sehnenviereck ABCD mit Diagonalenschnittpunkt S; die Fußpunkte der Lote von S auf AB und auf CD seien E bzw. F.
Man beweise: Die Mittelsenkrechte der Strecke EF halbiert die Seiten BC und DA.

Aufgabe 4

Es seien p und q zwei teilerfremde positive ganze Zahlen. Die Menge der ganzen Zahlen soll so in drei Teilmengen A, B, C zerlegt werden, dass für jede ganze Zahl z in jeder der Mengen A, B, C genau eine der drei Zahlen z, $z+p$, $z+q$ liegt.
Man beweise, dass eine solche Zerlegung genau dann möglich ist, wenn $p+q$ durch 3 teilbar ist.