



Die Aufgaben der 1. Runde 2003

Aufgabe 1

Gegeben seien sechs aufeinander folgende positive ganze Zahlen.

Man beweise, dass es eine Primzahl gibt, die Teiler von genau einer dieser Zahlen ist.

Aufgabe 2

Man ermittle alle Tripel (x, y, z) ganzer Zahlen, die jede der folgenden Gleichungen erfüllen:

$$(1) \quad x^3 - 4x^2 - 16x + 60 = y$$

$$(2) \quad y^3 - 4y^2 - 16y + 60 = z$$

$$(3) \quad z^3 - 4z^2 - 16z + 60 = x .$$

Hinweis: Es reicht nicht, lediglich Lösungen anzugeben, es muss auch bewiesen werden, dass es keine weiteren Lösungen gibt.

Aufgabe 3

In einem Parallelogramm $ABCD$ werden auf den Seiten AB und BC die Punkte M und N so gewählt, dass sie mit keinem Eckpunkt zusammenfallen und die Strecken AM und NC gleich lang sind. Der Schnittpunkt der Strecken AN und CM wird mit Q bezeichnet.

Man beweise, dass DQ den Winkel ADC halbiert.

Aufgabe 4

Man gebe alle positiven ganzen Zahlen an, die sich nicht in der Form $\frac{a}{b} + \frac{a+1}{b+1}$ darstellen lassen, wobei a und b positive ganze Zahlen sind.

Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.