Die Aufgaben der 2. Runde 2002

Aufgabe 1

Ein Kartenstapel, dessen Karten von 1 bis n durchnummeriert sind, wird gemischt. Nun wird wiederholt die folgende Operation ausgeführt:
Wenn an der obersten Stelle die Karte mit der Nummer k liegt, dann wird innerhalb der obersten k Karten die Reihenfolge umgekehrt.
Man beweise, dass nach endlich vielen solcher Operationen die Karte mit der Nummer 1 oben liegt.

Aufgabe 2

Gesucht werden streng monoton wachsende Folgen $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ nicht-negativer ganzer Zahlen mit der Eigenschaft, dass jede nicht-negative ganze Zahl eindeutig in der Form $a_i+2a_j+4a_k$ dargestellt werden kann; dabei sind i, j und k nicht notwendigerweise verschieden.
Man beweise, dass es genau eine solche Folge gibt und bestimme a_{2002}.

Aufgabe 3

Gegeben ist ein konvexes Polyeder mit einer geraden Anzahl von Kanten.
Man beweise, dass jede Kante so mit einem Pfeil versehen werden kann, dass für jede Ecke die Anzahl der in ihr mündenden Pfeile gerade ist.

Aufgabe 4

In einem spitzwinkligen Dreieck ABC seien H_a und H_b die Fußpunkte der von A bzw. B ausgehenden Höhen; W_a und W_b seien die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden durch A bzw. durch B mit den gegenüberliegenden Seiten.
Man beweise: Im Dreieck ABC liegt der Inkreismittelpunkt I genau dann auf der Strecke H_aH_b, wenn der Umkreismittelpunkt U auf der Strecke W_aW_b liegt.