Die Aufgaben der ersten Runde 2001

Aufgabe 1

Auf dem Tisch liegt ein Haufen mit 2001 Spielsteinen, der schrittweise in Haufen mit je drei Steinen umgewandelt werden soll. Dabei besteht ein Schritt darin, dass ein Haufen ausgewählt, daraus ein Stein entfernt und der Resthaufen in zwei Haufen zerlegt wird.
Kann dies mit einer Folge von vollständig ausgeführten Schritten erreicht werden?

Ergänzende Bemerkungen: Die Richtigkeit der Antwort muss bewiesen werden.
Ein Haufen besteht immer aus mindestens einem Stein.

Aufgabe 2

Von einer Folge $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ reeller Zahlen sei bekannt:

$$a_0 = 1 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = a_n + \sqrt{a_{n+1} + a_n} \quad \text{für alle natürlichen Zahlen } n.$$

Man beweise, dass nur eine einzige Folge mit diesen Eigenschaften existiert, und gebe eine explizite Formel für a_n an.

Aufgabe 3

Gegeben sei ein spitzwinkliges Dreieck ABC mit Umkreismittelpunkt O. Die Gerade (BO) schneide den Umkreis nochmals in D, und die Verlängerung der von A ausgehenden Höhe schneide den Kreis in E. Man beweise, dass das Viereck BECD und das Dreieck ABC den gleichen Flächeninhalt haben.

Aufgabe 4

Man beweise: Bei jeder positiven ganzen Zahl ist die Anzahl der Teiler, deren Dezimaldarstellung auf 1 oder 9 endet, nicht kleiner als die Anzahl der Teiler, deren Dezimaldarstellung auf 3 oder 7 endet.