Die Aufgaben der ersten Runde 2000

Aufgabe 1

Zwei natürliche Zahlen, von denen die eine durch Ziffernpermutation aus der anderen entsteht, haben die Summe 999...9 (lauter Neunen).
Ist dies möglich, wenn jede der Zahlen
a) 1999 Stellen hat,
b) 2000 Stellen hat?

Erläuterung: Die Aussagen über Ziffern und Stellenzahl beziehen sich auf die Dezimaldarstellung der vorkommenden Zahlen.

Aufgabe 2

Man betrachte fünf positive ganze Zahlen, bei denen die Summe von je drei dieser Zahlen durch die Summe der restlichen beiden Zahlen teilbar ist; dies ist z. B. der Fall bei den Zahlen 1, 1, 1, 1, 2.
Man entscheide, ob es fünf *paarweise verschiedene* Zahlen mit dieser Eigenschaft gibt.

Aufgabe 3

Dem Halbkreis über einer Strecke AB sei ein konvexes Viereck ABCD einbeschrieben.
Der Schnittpunkt von AC und BD sei S, der Fußpunkt des Lotes von S auf AB sei T.
Man beweise, dass ST den Winkel CTD halbiert.

Aufgabe 4

Ein kreisförmiges Spielbrett sei in n Sektoren ($n \geq 3$) eingeteilt, von denen jeder entweder leer oder mit einem Spielstein besetzt ist. Die Verteilung der Spielsteine wird schrittweise verändert: Ein Schritt besteht daraus, dass man einen besetzten Sektor auswählt, seinen Spielstein entfernt und die beiden Nachbarsektoren „umpolt" d. h. einen besetzten Sektor leert und einen leeren Sektor mit einem Spielstein besetzt.
Für welche Werte von n kann man in endlich vielen Schritten lauter leere Sektoren erzielen, wenn anfangs ein einziger Sektor besetzt ist?