Lösungen zur 1. Auswahlklausur 2019/2020

Aufgabe 1: Die reellen Zahlen $r_1, r_2, ..., r_{2019}$ erfüllen die Bedingungen
$r_1 + r_2 + ... + r_{2019} = 0$ (1) sowie $r_1^2 + r_2^2 + ... + r_{2019}^2 = 1$ (2).
Es sei $a = \min(r_1, r_2, ..., r_{2019})$ und $b = \max(r_1, r_2, ..., r_{2019})$. Man beweise: $ab \le \frac{-1}{2019}$.

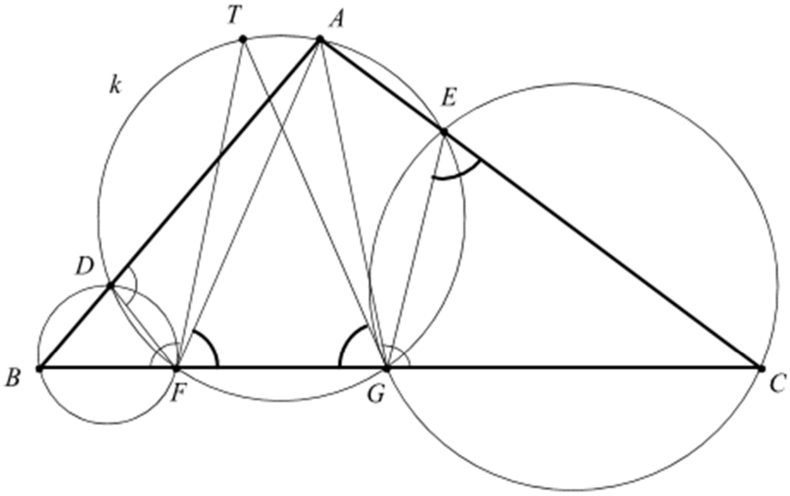
1. Lösung: Weil wegen (2) die r_i nicht alle 0 sein und wegen (1) nicht alle das gleiche Vorzeichen haben können, gilt $b > 0$ und $a < 0$. Mit $P = \{i : u_i > 0\}$ und $N = \{i : u_i \le 0\}$ sowie $p = |P|$ und $n = |N|$ gilt $p + n = 2019$ und aus (1) folgt
$0 = \sum_{i=1}^{2019} u_i = \sum_{i \in P} u_i - \sum_{i \in N} |u_i|$, also $\sum_{i \in P} u_i = \sum_{i \in N} |u_i|$.
Damit können wir abschätzen: $\sum_{i \in P} u_i^2 \le \sum_{i \in P} b u_i = b \sum_{i \in N} |u_i| \le b \sum_{i \in N} |a| = -nab$ (3)
sowie $\sum_{i \in N} u_i^2 \le \sum_{i \in N} a u_i \le |a| \sum_{i \in N} |u_i| = |a| \sum_{i \in P} u_i \le -pab$ (4).
Es folgt $1 = \sum_{i \in P} u_i^2 + \sum_{i \in N} u_i^2 \le -(p+n)ab = -2019ab$, und damit die Behauptung.
Anstelle von (3) und (4) ist eine Lösung über die AM-QM- bzw. die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung möglich.

2. Lösung: Wiederum ausgehend von $b > 0$ und $a < 0$ betrachten wir die folgende konvexe Punktmenge C in der x-y-Ebene:
(i) Der untere Rand von C ist die Parabel $y = x^2$ im Bereich $a \le x \le b$.
(ii) Der obere Rand von C ist die Gerade $g: y = (a+b)x - ab$ im Bereich $a \le x \le b$.
Jeder der Punkte (u_i, u_i^2) liegt auf dem unteren Rand von C. Daher liegt der Schwerpunkt S dieser 2019 Punkte, die mit gleicher Masse versehen seien, ebenfalls in C. Es gilt
$S = \left(\frac{1}{2019}\sum_{i=1}^{2019} u_i, \frac{1}{2019}\sum_{i=1}^{2019} u_i^2\right) = \left(0, \frac{1}{2019}\right)$. Für g gilt an der Stelle $x = 0$, dass $y = -ab$ ist.
S darf nicht oberhalb der oberen Begrenzung liegen, woraus die Behauptung folgt.

3. Lösung: (Ein Ein-Zeilen-Beweis):
$0 \le \sum_{i=1}^{2019} (r_i - a)(b - r_i) = \sum_{i=1}^{2019} \left(-r_i^2 + (b+a)r_i - ab\right) = -1 - 2019ab \Leftrightarrow ab \le \frac{-1}{2019}$.

Hinweis: Häufig wurde mit einem „Schiebeargument“ versucht, eine Lösung zu optimieren, bis die zu zeigende Ungleichung erfüllt war. Dabei traten oft Lücken auf.

Aufgabe 2: Gegeben sei ein Dreieck ABC. Ein Kreis k geht durch A, schneidet die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ nochmals in den Punkten D bzw. E und schneidet die Seite $\overline{BC}$ in den Punkten F und G, wobei F zwischen B und G liegt. Die Tangente an den Kreis durch B, D und F in F und die Tangente an den Kreis durch C, E und G in G schneiden sich in einem Punkt T. Wir nehmen an, dass $A \ne T$ gilt. Man beweise, dass die Geraden AT und BC parallel sind.



Lösung: Nach dem Sehnen-Tangentenwinkelsatz für die Sehne $\overline{FB}$ gilt (siehe Figur) $\angle TFB = 180° - \angle BDF = \angle FDA$. Im Sehnenviereck *ADFG* gilt daher $\angle FDA = 180° - \angle AGF = \angle CGA$ (kleine Bögen), analog ist $\angle TGB = 180° - \angle CGT = \angle GEC$ und $\angle GEC = \angle CFA$ (Sehnenviereck *AFGE*, große Bögen). Also gilt $\angle TFB = \angle CGA$ (1), woraus $\angle GFT = \angle AGB$ folgt, und $\angle TGB = \angle CFA$ (2).
Damit sind die Dreiecke *AFG* und *TFG* nach wsw kongruent, somit ihre Höhen auf der gemeinsamen Seite $\overline{FG}$ gleich, woraus die Behauptung folgt.
Variante: Aus (1) und (2) folgt direkt, dass $\angle AFT = \angle AGT$ gilt. Dies bedeutet nach der Umkehrung des Satzes vom Sehnenviereck, dass *T* auf *k* liegt. Mit $\angle TAF = \angle TGF = \angle GFA$ folgt die Parallelität von $\overline{TA}$ und $\overline{FG}$.

Hinweis: Für einige Behauptungen ist eine Lagebetrachtung erforderlich, deren Fehlen einen Punktabzug zur Folge hatte.

Aufgabe 3: Es seien *m* und *n* zwei positive ganze Zahlen. Man beweise, dass die ganze Zahl $m^2 + \left\lceil \frac{4m^2}{n} \right\rceil$ keine Quadratzahl ist.

(Dabei bezeichnet $\lceil x \rceil$ die kleinste ganze Zahl, die nicht kleiner als *x* ist.)

Lösung: Für einen indirekten Beweis nehmen wir an, dass es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $m^2 + \left\lceil \frac{4m^2}{n} \right\rceil = (m+k)^2$, d.h. $\left\lceil \frac{(2m)^2}{n} \right\rceil = (2m+k)k$. Offensichtlich ist $k \geq 1$. Also hat die Gleichung $\left\lceil \frac{c^2}{n} \right\rceil = (c+k)k$ (1) eine positive ganzzahlige Lösung (c,k) mit geradem *c*. Ohne auf die Parität von *c* zu achten, betrachten wir eine solche Lösung von (1) mit minimalem *k*.
Aus $\frac{c^2}{n} > \left\lceil \frac{c^2}{n} \right\rceil - 1 = ck + k^2 - 1 \geq ck$ und $\frac{(c-k)(c+k)}{n} < \frac{c^2}{n} \leq \left\lceil \frac{c^2}{n} \right\rceil = (c+k)k$ entnehmen wir $c > nk > n-k$, so dass $c = kn + r$ mit geeignetem $0 < r < k$ gilt. Dies in (1) eingesetzt liefert $\left\lceil \frac{c^2}{n} \right\rceil = \left\lceil \frac{(nk+r)^2}{n} \right\rceil = k^2n + 2kr + \left\lceil \frac{r^2}{n} \right\rceil$ und $(c+k)k = (kn+r+k)k = k^2n + 2kr + k(k-r)$, so dass $\left\lceil \frac{r^2}{n} \right\rceil = k(k-r)$ (2) folgt. Dies liefert eine andere positive ganzzahlige Lösung von (1) mit $c' = r$ und $k' = k - r < k$, was der Minimalität von *k* widerspricht.

Variante: Es sei $m^2+\left\lceil\frac{4m^2}{n}\right\rceil=c^2$ für eine positive ganze Zahl $c>m$, woraus

$c^2-1<m^2+\frac{4m^2}{n}\le c^2$ und daraus $0\le c^2n-m^2(m+4)<n$ (3) folgt. Wir substituieren

$d=c^2n-m^2(n+4)$, $x=c+m$ und $y=c-m$, erhalten $c=\frac{x+y}{2}$ sowie $m=\frac{x-y}{2}$ und

schreiben (3) damit um: $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 n-\left(\frac{x-y}{2}\right)^2(n+4)=d$ bzw. $x^2-(n+2)xy+y^2+d=0$ (4)

mit $0\le d<n$. Wir wählen für festes n und d ein ganzzahliges Lösungspaar (x,y), für das $x+y$ minimal ist. Wegen der Symmetrie von (4) können wir dabei $x\ge y\ge 1$ annehmen. Wie oben lässt sich auch hier eine weitere Lösung (z,y) finden, für die $z<x$ ist – Widerspruch!

Hinweis: Wer „Vieta jumping" kennt, kann auch diese Methode hier wunderbar anwenden.
Diese Aufgabe war die schwerste der Klausur und wurde von keinem Teilnehmer vollständig gelöst.
Relativ häufig auftretende Fehler: rationale Quadratzahlen wurden mit ganzen Quadratzahlen verwechselt, ebenso die obere mit der unteren Gaußklammer verwechselt, aus der Gaußklammer wurden Faktoren herausgezogen oder mit ihr wurde Restklassenrechnung betrieben.

Lösungen zur 2. Auswahlklausur 2019/2020

Aufgabe 1. Ein Pirat möchte einen Schatz, bestehend aus 1000 Goldmünzen, die jeweils mindestens $1\,g$ und zusammen genau $2\,kg$ wiegen, in zwei Teile aufteilen, die in ihrer Masse jeweils um höchstens $1\,g$ von $1\,kg$ abweichen. Beweisen Sie, dass dies möglich ist.

1. Lösung (Vollständige Induktion). Die Massen der 1000 Münzen in Gramm, in aufsteigender Reihenfolge geordnet, seien mit $m_1\le m_2\le\cdots\le m_{1000}$ bezeichnet. Wir beweisen nun zunächst mit vollständiger Induktion nach $\ell=1,\ldots,1000$ die folgende Aussage.

Lemma. Für alle $1\le\ell\le 1000$ und jede reelle Zahl $0\le x\le 2+\sum_{i=1}^{\ell}m_i$ existiert eine (potentiell leere) Teilmenge $I\subset\{1,2,\ldots,\ell\}$, sodass $\sum_{i\in I}m_i\in[x-2,x]$ gilt.

Es gilt $x_1\le 2000/1000=2$, also ist der Induktionsanfang $\ell=1$ klar: falls $x<2$, können wir $I=\emptyset$ wählen, ansonsten funktioniert $I=\{1\}$.

Für den Induktionsschritt ($\ell\to\ell+1$, wobei $\ell\le 999$) sehen wir, dass für $x\le\sum_{i=1}^{\ell}m_i$ nichts zu zeigen ist. Da wir jede Menge I durch $I\cup\{\ell+1\}$ ersetzen können, ist die Behauptung auch für $m_{\ell+1}\le x\le m_{\ell+1}+\sum_{i=1}^{\ell}m_i=\sum_{i=1}^{\ell+1}m_i$ erfüllt. Der Induktionssschritt ist also beendet, außer es gilt $2+\sum_{i=1}^{\ell}m_i<m_{\ell+1}$. In diesem Fall folgt $m_i>2+\ell$ für alle $\ell+1\le i\le 1000$, was folgende Umgleichung impliziert.

$$2000=\sum_{i=1}^{1000}m_i=\sum_{i=1}^{\ell}m_i+\sum_{i=\ell+1}^{1000}m_i>\ell+(1000-\ell)(2+\ell)=2000+999\ell-\ell^2$$

Damit folgt $\ell>999$, ein Widerspruch, was den Beweis des Lemmas abschließt. ■

Wir wenden das Lemma nun auf $\ell=1000$ und $x=1001$ an. Dadurch wird ersichtlich, dass eine Teilmenge $I\subset\{1,2,\ldots,1000\}$ existiert, für die $\sum_{i\in I}x_i\in[999,1001]$ gilt. Wegen $\sum_{i=1}^{1000}m_i=2000$ gilt auch $\sum_{i\in\{1,\ldots,1000\}\setminus I}x_i\in[999,1001]$, und die Aufteilung der Münzen, die der Zerlegung

$$\{1,\ldots,1000\}=I\cup(\{1,\ldots,1000\}\setminus I)$$

entspricht, erfüllt die Behauptung. □

2. Lösung (Greedy-Algorithmus). Wir verwenden die gleiche Notation wie in der ersten Lösung. Der Pirat verteilt die Münzen nach folgendem Verfahren: Er legt alle Münzen, in absteigender Reihenfolge ihrer Massen (also beginnend mit der schwersten Münze mit Masse m_{1000}), nach und nach auf zwei Haufen H_1 und H_2, wobei er jede Münze auf denjenigen Haufen legt, der zu diesem Zeitpunkt leichter ist; bei eine Gleichgewicht wählt er einen beliebigen Haufen aus.

Wir behaupten, dass keiner der beiden Haufen jemals mehr als 1001 Gramm wiegt.

Angenommen, nach dem Hinzulegen der $k$ten Münze mit Masse m_{1001-k} ist doch einer der Haufen schwerer als 1001 Gramm. Vor diesem Schritt wogen beide Haufen zusammen $\sum_{i=1002-k}^{1000}m_i$

Gramm, und da die Münze auf den leichteren Haufen gelegt wurde, folgt

$$\begin{aligned}
m_{1001-k} + \frac{1}{2}\sum_{i=1002-k}^{1000} m_i &> 1001 \\
m_{1001-k} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{1000} m_i &> 1001 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{1001-k} m_i \\
\frac{1}{2}m_{1001-k} + 1000 &> 1001 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{1000-k} m_i \\
m_{1001-k} &> 2 + \sum_{i=1}^{1000-k} m_i \geq 2 + 1000 - k = 1002 - k.
\end{aligned}$$

Damit folgt nun

$$\begin{aligned}
2000 = \sum_{i=1}^{1000} m_i &= \left(\sum_{i=1}^{1000-k} m_i\right) + \left(\sum_{i=1001-k}^{1000} m_i\right) \\
&\geq 1000 - k + k \cdot m_{1001-k} \\
&> 1000 - k + k(1002 - k),
\end{aligned}$$

also folgt $f(k) = -k^2 + 1001k - 1000 < 0$, was wegen $f(k) = (k-1)(1000-k)$ und $1 \leq k \leq 1000$ jedoch ein Widerspruch ist.

Also stimmt die Behauptung, und auch nach dem Verteilen der leichtesten Münze mit Masse m_1 wiegen beide Haufen nicht mehr als 1001 Gramm. Da sie zusammen 2000 Gramm wiegen, muss damit jeder Haufen mindestens 999 Gramm wiegen, und wir haben eine Verteilung wie gefordert gefunden. □

3. Lösung (Schubfachprinzip). Wir verwenden wieder die gleiche Notation wie in der ersten Lösung. Wegen $m_{1000} \geq 2 > 1$ gilt $m_1 + \cdots + m_{999} < 1999$, und die 1000 Summen

$$0, m_1, m_1 + m_2, \ldots, m_1 + m_2 + \cdots + m_{999}$$

liegen jeweils in genau einem der 1000 Schubfächer

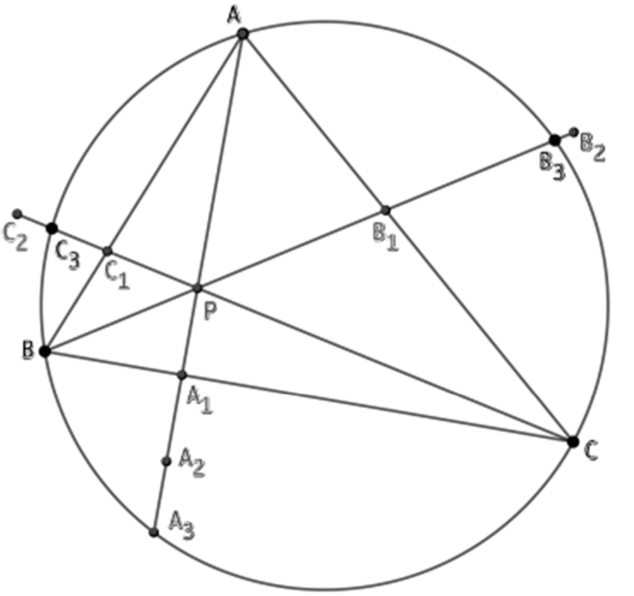
$$\begin{gathered}
[0,1) \cup [1000, 1001), \\
[1,2) \cup [1001, 1002), \\
\ldots, \\
[998, 999) \cup [1998, 1999), \\
[999, 1000)
\end{gathered}$$

Falls eine der Summen im letzten Schubfach $[999, 1000)$ liegt, sind wir fertig, ansonsten liegen zwei Summen im gleichen Schubfach $[k, k+1) \cup [1000+k, 1001+k)$ (für ein festes $0 \leq k \leq 998$). Da nach Voraussetzung $m_i \geq 1$ gilt, liegt eine der Summen im Intervall $[k, k+1)$ und die andere in $[1000+k, 1001+k)$, die Differenz $m_{i+1} + m_{i+2} + \cdots + m_j$ der beiden Summen liegt somit im Intervall $(999, 1001)$ und liefert daher eine Verteilung wie gewünscht. □

Aufgabe 2. Es seien ein Dreieck ABC mit Umkreis Ω sowie Punkte A_1, B_1 und C_1 auf den Dreiecksseiten $\overline{BC}, \overline{CA}$ und $\overline{AB}$ gegeben, sodass die drei Geraden AA_1, BB_1 und CC_1 einen Punkt P gemeinsam haben.
Es ist zu zeigen, dass höchstens zwei der drei Spiegelpunkte von P bei Punktspiegelung an A_1, B_1, bzw. C_1 außerhalb von Ω liegen.

Lösung. Wegen $\measuredangle BPC + \measuredangle CPA + \measuredangle APB = 360° = (180° - \measuredangle BAC) + (180° - \measuredangle CBA) + (180° - \measuredangle ACB)$ dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $\measuredangle APB \leq 180° - \measuredangle ACB$ gilt. Da P im Inneren des Dreiecks ABC liegt, gilt $\measuredangle APB > \measuredangle ACB$, woraus $\measuredangle APB \in [\measuredangle ACB, 180° - \measuredangle ACB]$ und damit $\sin \measuredangle APB \geq \sin \measuredangle ACB$ folgt.

Es seien A_2, B_2 und C_2 die im Aufgabentext beschriebenen Spiegelpunkte, sowie A_3, B_3 und C_3 die zweiten Schnittpunkte der Geraden AP, BP und CP mit Ω. Wir werden nun beweisen, dass mindestens eines der Verhältnisse $\frac{|PA_1|}{|A_1A_3|}$ und $\frac{|PB_1|}{|B_1B_3|}$ nicht größer als 1 ist, woraus die Behauptung folgt.



Dazu rechnen wir unter Ausnutzung des Sinussatzes,

$$\frac{|\overline{PA_1}|}{|\overline{A_1A_3}|} = \frac{|\overline{PA_1}|}{|\overline{A_1B}|} \cdot \frac{|\overline{A_1B}|}{|\overline{A_1A_3}|} \overset{(*)}{=} \frac{\sin\measuredangle CBP}{\sin\measuredangle APB} \cdot \frac{|\overline{A_1A}|}{|\overline{A_1C}|} = \frac{\sin\measuredangle CBP}{\sin\measuredangle APB} \cdot \frac{\sin\measuredangle ACB}{\sin\measuredangle PAC},$$

wobei wir im Schritt $(*)$ die Gleichung $|\overline{A_1B}| \cdot |\overline{A_1C}| = |\overline{A_1A}| \cdot |\overline{A_1A_3}|$ verwendet haben, die aus dem Sehnensatz folgt. Analog zeigt man nun auch

$$\frac{|\overline{PB_1}|}{|\overline{B_1B_3}|} = \frac{\sin\measuredangle PAC}{\sin\measuredangle APB} \cdot \frac{\sin\measuredangle ACB}{\sin\measuredangle CBP},$$

und durch Multiplikation beider Gleichungen folgt schließlich

$$\frac{|\overline{PA_1}|}{|\overline{A_1A_3}|} \cdot \frac{|\overline{PB_1}|}{|\overline{B_1B_3}|} = \frac{(\sin\measuredangle ACB)^2}{(\sin\measuredangle APB)^2} \leq 1,$$

was die Behauptung impliziert. □

Anmerkung: Viele der Teilnehmenden haben statt der eigentlich gestellten Aufgabe das (deutlich einfachere) Problem gelöst, in dem P an den drei Seiten des Dreiecks statt an den Punkten A_1, B_1, und C_1 gespiegelt wird, und gezeigt, dass mindestens einer der resultierenden Spiegelpunkte nicht außerhalb des Dreiecks liegt.

Aufgabe 3. Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Zeigen Sie, dass es ganze Zahlen a, b und c gibt, die nicht alle 0 sind, sodass die Ungleichung $|a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{5}| < \varepsilon$ erfüllt ist.
Beweisen Sie außerdem, dass in jedem Tripel $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ ganzer Zahlen, für das diese Ungleichung gilt, mindestens einer der Absolutbeträge $|a|$, $|b|$, $|c|$ größer als $\varepsilon^{-1/3}/\sqrt{30}$ ist.

Lösung. Im ersten Beweis des ersten Teils bezeichnen wir für eine reelle Zahl x sei $[x]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist (Gauß-Klammer), die Zahl $\langle x \rangle := x - [x] \in [0, 1)$ wird als als gebrochener Anteil von x bezeichnet.

Wir wählen eine ganze Zahl $n > \sqrt{2}\varepsilon^{-1}$. Nach dem Schubfachprinzip existieren verschiedene Indizes $i, j \in \{0, 1, d \ldots, n\}$, sodass $\langle i\sqrt{6} \rangle$ und $\langle j\sqrt{6} \rangle$ im gleichen der n Intervalle

$$\left[0, \frac{1}{n}\right), \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right), \ldots, \left[\frac{n-1}{n}, 1\right)$$

liegen. Dann existiert eine ganze Zahl a, sodass $|a - (i\sqrt{6} - j\sqrt{6})| < 1/n$ gilt. Daraus folgt durch Multiplikation mit $\sqrt{2}$, für $b := 2(j - i)$, die Ungleichung $|a\sqrt{2} + b\sqrt{3}| < \sqrt{2}/n < \varepsilon$, was mit $c = 0$ auf die Ungleichung im Aufgabentext führt.

Der zweite Beweis kommt ohne das Schubfachprinzip aus: Wegen $0 < \sqrt{6} - 2 < 1$ finden wir eine positive ganze Zahl k, sodass $X = (\sqrt{6} - 2)^k \in (0, \varepsilon/\sqrt{3})$. Offenbar gibt es von 0 verschiedene ganze Zahlen a_0, b_0, sodass $X = a_0\sqrt{6} + b_0$. Wir setzen nun $a = 3a_0$, $b = b_0$, $c = 0$, dann gilt $|a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{5}| = |\sqrt{3}(a_0\sqrt{3}\sqrt{2} + b_0)| = \sqrt{3}X < \varepsilon$.

Anmerkung: es ist auch möglich, diesen Teil der Aufgabe in wenigen Zeilen aus dem Dirichletschen Approximationssatz oder dem Gitterpunktsatz von Minkowski herzuleiten. Bei der Korrektur wurde aber Wert darauf gelegt, dass diese Sätze genau zitiert wurden.

Für den (schwierigeren) zweiten Teil der Aufgabe nehmen wir an, dass a, b und c die Ungleichung erfüllen. Wir berechnen zunächst, dass es sich beim folgenden Ausdruck um eine ganze Zahl handelt.

$$\begin{aligned}
Z &:= \left(a\sqrt{2}+b\sqrt{3}+c\sqrt{5}\right)\left(a\sqrt{2}-b\sqrt{3}-c\sqrt{5}\right)\left(a\sqrt{2}+b\sqrt{3}-c\sqrt{5}\right)\left(a\sqrt{2}-b\sqrt{3}+c\sqrt{5}\right)\\
&= \left(2a^2-(3b^2+2\sqrt{15}bc+5c^2)\right)\left(2a^2-(3b^2-2\sqrt{15}bc+5c^2)\right)\\
&= (2a^2-3b^2-5c^2)^2-60b^2c^2
\end{aligned}$$

Diese Zahl ist von 0 verschieden, denn ansonsten wäre 60 das Quadrat einer rationalen Zahl, was aufgrund der eindeutigen Primfaktorzerlegung positiver ganzer Zahlen aber nicht der Fall ist. Damit gilt $|Z| \geq 1$. Andererseits lässt sich $|Z|$ wie folgt nach oben abschätzen

$$\begin{aligned}
|Z| &< |a\sqrt{2}+b\sqrt{3}+c\sqrt{5}| \cdot \left(|a|\sqrt{2}+|b|\sqrt{3}+|c|\sqrt{5}\right)^3\\
&< \varepsilon\left((2+3+5)^{\frac{1}{2}} \cdot (a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}\right)^3\\
&< \left(\varepsilon^{1/3}\sqrt{10}\cdot\sqrt{3}\cdot\ \max(|a|,|b|,|c|)\right)^3,
\end{aligned}$$

wobei wir im zweiten Schritt die Ungleichung von Cauchy-Schwarz verwendet haben. Nach Umstellung folgt die Behauptung. □