Lösungen zur 1. Auswahlklausur 2018/2019

Aufgabe 1
Die Menge aller positiver rationaler Zahlen sei mit $\mathbb{Q}^+$ bezeichnet. Man bestimme alle Funktionen $f:\mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ mit der Eigenschaft $f(x^2 f(y)^2) = f(x^2)f(y)$ (*) für alle $x, y \in \mathbb{Q}^+$.

Lösung: Wir beginnen mit einigen für die Lösungsmenge wichtigen Eigenschaften der **Grundmenge** $\mathbb{Q}^+$. Bekanntlich liegt das Produkt *ab* zweier Zahlen $a,b \in \mathbb{Q}^+$ wieder in $\mathbb{Q}^+$, ebenso wie das Inverse $\frac{1}{a}$ zu jeder Zahl $a \in \mathbb{Q}^+$ (was für $\sqrt{a}$ nicht immer erfüllt ist). Weil auch das neutrale Element 1 der (kommutativen) Multiplikation zu $\mathbb{Q}^+$ gehört, bildet $\mathbb{Q}^+$ bezüglich der Multiplikation eine kommutative (= abelsche) **Gruppe**. Jede nicht-leere Teilmenge *U*, für die mit $a,b \in U$ auch stets $\frac{a}{b} \in U$ gilt, ist eine (abelsche) **Untergruppe** von $\mathbb{Q}^+$, d.h. sie enthält die Zahl 1, jedes Produkt zweier ihrer Elemente und zu jeder ihrer Zahlen den Kehrwert. Ein Beispiel ist $D = \{3^t \mid t \in \mathbb{Z}\}$, die Menge aller Dreierpotenzen mit ganzzahligen Exponenten; triviale Beispiele sind $U = \{1\}$ sowie $U = \mathbb{Q}^+$.
Weiter wird zu einer Untergruppe *U* von $\mathbb{Q}^+$ und einer beliebigen Zahl $a \in \mathbb{Q}^+$ die Menge $aU = \{au \mid u \in U\}$ als **Nebenklasse** von $\mathbb{Q}^+/U$ mit dem **Repräsentanten** *a* bezeichnet. Der Repräsentant einer Nebenklasse ist in der Regel nicht eindeutig bestimmt; ebenso sind die Nebenklassen in der Regel selber keine Gruppen. Ein Beispiel mit $a = 2$ ist die Menge $2D = \{2 \cdot 3^t \mid t \in \mathbb{Z}\}$, die z.B. auch den Repräsentanten 6 besitzt.
Nach diesen Vorbemerkungen können wir nun zunächst die **Lösungsmenge** beschreiben:
Es sei *U* eine beliebige Untergruppe von $\mathbb{Q}^+$ und $a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{Q}^+$ feste Repräsentanten der Nebenklassen von $\mathbb{Q}^+/U$. Ferner seien $u_1, u_2, \ldots$ Zahlen aus *U*, so dass jedem a_i genau ein u_i zugeordnet ist. Damit ergeben sich folgende Lösungen $f:\mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$:

$$f(x) = \begin{cases} r \cdot u_i & \text{für } x = a_i^2 \cdot r^2 \text{ mit } r \in U \\ u \text{ beliebig } \in U & \text{falls } x \text{ kein Quadrat einer Zahl aus } \mathbb{Q}^+ \text{ ist} \end{cases}$$

Dabei kommen alle Lösungen durch die möglichen Untergruppen *U* und die Auswahl der u_i zustande, sowie durch beliebige Wahl von $u \in U$ (die a_i sind für jedes *U* fest).
Zum Beispiel ergibt sich Folgendes für die trivialen Untergruppen von $\mathbb{Q}^+$:
a) $U = \{1\}$: Hier ist nur $r = u = 1$ sowie $u_i = 1$ möglich, so dass $f(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{Q}^+$.
b) $U = \mathbb{Q}^+$: Hier ist $f(x) = a\sqrt{x}$ mit festem *a*, wenn *x* eine Quadratzahl ist, sowie $f(x)$ beliebig aus $\mathbb{Q}^+$, wenn *x* keine Quadratzahl ist.
Der Beweis erfolgt in zwei Schritten.
Schritt 1: Wir zeigen, dass die angegebenen Funktionen *f* wohldefiniert sind und (*) erfüllen.
Jedes $t = x^2$ mit $x \in \mathbb{Q}^+$ lässt sich nach der Definition der Nebenklassen eindeutig in der Form $t = a_i^2 \cdot r^2$ mit $r \in U$ darstellen, und jedes Produkt $a_i^2 \cdot r^2$ ist eine rationale Quadratzahl. Somit ist *f* wohldefiniert.
Aus der Definition folgt ferner, dass die Wertemenge W_f von *f* in *U* liegt. Daher existiert für jedes $y \in \mathbb{Q}^+$ ein $u \in U$ mit $f(y) = u$. Weil für jedes $x \in \mathbb{Q}^+$ wie oben bemerkt eine eindeutige Darstellung $x^2 = a_i^2 \cdot r^2$ existiert, folgt $f\left(x^2 \cdot f(y)^2\right) = f(a_i^2 r^2 u^2) = f(a_i^2 (ru)^2) = (ru) \cdot u_i = (ru_i) \cdot u = f(a_i^2 r^2) f(y) = f(x^2) f(y)$, womit (*) erfüllt ist.

Schritt 2: Wir zeigen, dass keine weiteren Lösungen von (*) als die angegebenen existieren können. Dazu sei f eine Lösungsfunktion von (*) mit der Lösungsmenge $W_f \subseteq \mathbb{Q}^+$.

Wir setzen $y=1$ und $x=\frac{1}{f(1)}$ in (*) ein: $f\left(x^2 f(y)^2\right)=f\left(\frac{f(1)^2}{f(1)^2}\right)=f(1)=f(x^2)f(1)$. Somit ist $1\in W_f$.

Nun sei $z=\frac{1}{f(1)}$ fest (dies bedeutet nach dem oben Stehenden $f(z^2)=1$). Sei weiter $w\in W_f$ (dies bedeutet, dass es ein $u\in\mathbb{Q}^+$ gibt mit $f(u)=w$). Wir setzen $y=u$ und $x=\frac{z}{f(y)}$ in (*) ein:

$f\left(x^2 f(y)^2\right)=f(z^2)=1=f(x^2)\cdot w$, also $f(x^2)=\frac{1}{w}$. Somit liegt für jedes $w\in W_f$ auch $\frac{1}{w}$ in W_f.

Jetzt seien $v,w\in W_f$ (dies bedeutet, dass es $t,u\in\mathbb{Q}^+$ gibt mit $f(t)=v$ und $f(u)=w$).

Wir setzen $x=z=\frac{1}{f(1)}$ und $y=u$ in (*) ein, bezeichnen $k=x\cdot f(y)$ und erhalten $f(k^2)=1\cdot f(u)=w$.

Sodann setzen wir $x=k$ und $y=t$ neu in (*) ein: $f\left(x^2 f(y)^2\right)=f(k^2)f(t)=w\cdot v$. Somit liegt für $v,w\in W_f$ auch stets das Produkt vw in W_f.

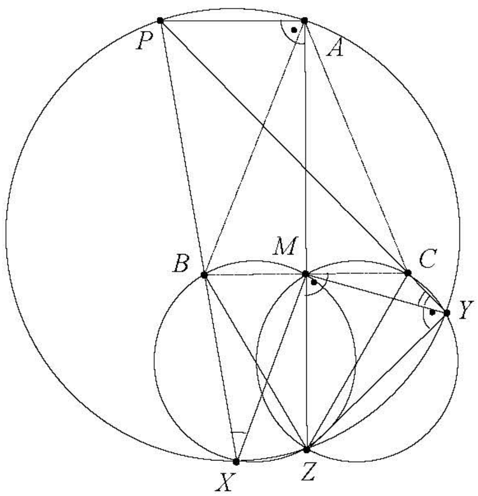
Damit ist nachgewiesen, dass W_f eine Untergruppe von $\mathbb{Q}^+$ ist.

Seien nun $a_1,a_2,\ldots$ fest gewählte Repräsentanten der Nebenklassen von $\mathbb{Q}^+/W_f$ (wie in der Beschreibung der Lösungsmenge) und $r\in W_f$ beliebig mit $f(u)=r$. Wir setzen $x=a_i$ (für beliebiges i) und $y=u$ in (*) ein: $f\left(x^2 f(y)^2\right)=f(a_i^2\cdot r^2)=f(a_i^2)f(u)=u_i\cdot r$ (wobei $f(a_i^2):=u_i$ gesetzt wird). Daraus ist ersichtlich, dass jede Lösungsfunktion f tatsächlich die oben beschriebene Form haben muss. □

Hinweis: Durch einen Übertragungsfehler ist diese Aufgabe schwerer geworden als beabsichtigt. Dieser Lösungsweg geht auf die Bearbeitung von Jonas Walter zurück, der als einziger Teilnehmer einen vollständigen Beweis angegeben hat. Die angemessene Berücksichtigung von $\mathbb{Q}^+$ als Grundmenge (anstatt $\mathbb{R}^+$) gelang nur einzelnen Teilnehmern.

Aufgabe 2

In einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit $|AB|=|AC|$ sei M der Mittelpunkt von BC. Weiter sei P ein Punkt, für den PA parallel zu BC ist und $|PB|<|PC|$ gilt. Ferner seien X bzw. Y je ein Punkt auf der Geraden (PB) bzw. (PC), so dass B auf der Strecke PX liegt, C auf der Strecke PY liegt und $\measuredangle MXP=\measuredangle PYM$ gilt. Man beweise, dass $APXY$ ein Sehnenviereck ist.



Lösung: Wir bezeichnen den Schnittpunkt von (AM) und der Senkrechten zu (PC) im Punkt Y mit Z und bemerken, dass Z in der bezüglich (BC) anderen Halbebene liegt wie A und P.
Wegen $\measuredangle PAZ=\measuredangle PYZ=90°$ ist $APZY$ ein Sehnenviereck. Ebenso ist wegen $\measuredangle ZMC=\measuredangle CYZ=90°$ auch $CMZY$ ein Sehnenviereck, woraus $\measuredangle CZM=\measuredangle CYM$ (1) folgt.
Mit der Bedingung aus der Aufgabe ergibt sich $\measuredangle CYM=\measuredangle MXB$ (2), und wegen der Achsensymmetrie zu (AZ) ist $\measuredangle CZM=\measuredangle MZB$ (3).
(1), (2) und (3) liefern $\measuredangle MXB=\measuredangle MZB$. Also ist $BXZM$ ebenfalls ein Sehnenviereck und es gilt $\measuredangle ZXB=180°-\measuredangle BMZ=90°$. Weil nun $\measuredangle ZXP=\measuredangle ZXB=90°$ ist, liegt der Punkt X auf dem Umkreis des Sehnenvierecks $APZY$. Somit bilden auch die vier Punkte A, P, X und Y ein Sehnenviereck. □

Hinweis: Eine reine Winkeljagd führt hier nicht zum Ziel, ebenso wie Koordinatengeometrie. Dagegen gibt es weitere Lösungswege etwa über Inversion oder die Einführung anderer Hilfspunkte als Z.

Aufgabe 3

Gegeben ist eine positive ganze Zahl n und ein Spielbrett, das aus $n+1$ nebeneinander angeordneten quadratischen Feldern besteht, die von links nach rechts von 0 bis n nummeriert sind. Zu Beginn des Spiels befinden sich n Spielsteine auf dem Feld Nr. 0 und die anderen Felder sind leer.
Ein geduldiger Spieler wählt nun für jeden Zug ein Feld mit $k\neq 0$ Steinen und rückt einen davon um höchstens k Felder nach rechts. Dabei muss der Stein auf dem Spielbrett bleiben. Sein Ziel ist es, mit einer Folge solcher Züge alle n Steine auf das Feld Nr. n zu befördern.
Man beweise, dass der Spieler dieses Ziel nicht mit weniger als $\left\lceil\frac{n}{1}\right\rceil+\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil+\ldots+\left\lceil\frac{n}{n}\right\rceil$ Zügen erreichen kann. (Dabei bezeichnet $\lceil x\rceil$ die kleinste ganze Zahl, die nicht kleiner als x ist.)

Lösung: Die Spielsteine sind ununterscheidbar und haben alle dasselbe Start- und Zielfeld. Daher kann der geduldige Spieler eine Vorschrift erfinden, die ihm angibt, welchen der Steine auf dem jeweils ausgewählten Feld er ziehen soll.
Eine mögliche Vorschrift erhält er, indem er die Steine fest von 1 bis n nummeriert und in jedem Zug nach der Auswahl des Feldes den dort befindlichen Stein mit der höchsten Nummer bewegt.
Angenommen, er zieht auf diese Weise den Stein mit der Nummer k ($1 \le k \le n$) nach rechts. Dann können auf dem dafür ausgewählten Feld nicht mehr als k Steine gelegen haben, weil ihre Nummern höchstens gleich k sind. Also wird Stein k um jeweils höchstens k Felder nach rechts bewegt. Weil er aber insgesamt um genau n Felder bewegt wird, sind dafür wenigstens $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ Züge erforderlich. Dies gilt für alle k mit $1 \le k \le n$. Aufsummieren über k liefert die Mindestanzahl der erforderlichen Spielzüge gemäß der Aufgabenstellung. □

Hinweis: Ein Beweis mit vollständiger Induktion ist ebenso zum Scheitern verurteilt wie Betrachtungen scheinbar „optimaler" Strategien, deren Optimalität nur lokal einsichtig begründet werden kann.
Man kann zeigen, dass der genaue Wert des angegebenen Terms nur für $n = 1,2,3,4,5,7$ erreicht werden kann.

Lösungen zur 2. Auswahlklausur 2018/2019

Aufgabe 1. Finden Sie alle Paare (a, b) positiver ganzer Zahlen, für die eine positive ganze Zahl n existiert, sodass die Anzahl der Teiler von na und nb identisch ist.

Lösung. Die gesuchten Paare sind jene, für die eine der drei Bedingungen $a = b$, $a \nmid b$ oder $b \nmid a$ erfüllt ist, also alle Paare positiver ganzer Zahlen mit Ausnahme solcher, für die eine der Zahlen a, b ein echter Teiler der anderen ist.
Im gesamten Beweis werden wir die Anzahl aller Teiler einer positiven ganzen Zahl m mit $\tau(m)$ bezeichnen. Zunächst ist klar, dass man im Fall $a = b$ ein beliebiges n wählen kann. Ferner ist im Fall, dass a ein echter Teiler von b ist, für jede positive ganze Zahl n die Zahl na ein echter Teiler von nb, die Menge ihrer Teiler ist damit eine echte Teilmenge der Menge der Teiler von nb, was $\tau(na) < \tau(nb)$ impliziert. Der Fall $b \mid a$, $b < a$ wird analog behandelt.
Es bleibt zu zeigen, dass wir im Fall $a \nmid b, b \nmid a$ stets ein n mit $\tau(na) = \tau(nb)$ finden können. Dafür beweisen wir zunächst die folgende Aussage.
Lemma. Es seien $\alpha > \beta$ positive ganze Zahlen. Dann existiert für jede ganze Zahl $M > \beta$ eine positive ganze Zahl γ, sodass

$$\frac{\alpha + \gamma + 1}{\beta + \gamma + 1} = 1 + \frac{1}{M} = \frac{M+1}{M}.$$

Beweis. Nach Umformen der ersten Gleichung erhält man $\gamma = M(\alpha - \beta) - (\beta + 1) \geq 0$. ■
Nun betrachten wir die Primfaktorzerlegung $a = \prod_p p^{\alpha_p}$ und $b = \prod_p p^{\beta_p}$ von a und b. Es seien nun $p_1, \ldots p_k$ all jene Primzahlen p mit $\alpha_p > \beta_p$ und $q_1, \ldots, q_\ell$ alle Primzahlen q mit $\alpha_q < \beta_q$. Wegen $a \nmid b, b \nmid a$ sind k und ℓ beide positiv. Es sei nun X eine positive ganze Zahl, die größer als alle α_p und β_b ist. Laut obigem Lemma können wir dann Zahlen $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ und $\gamma'_1, \ldots, \gamma'_\ell$ wählen, sodass

$$\frac{\alpha_{p_i} + \gamma_i + 1}{\beta_{p_i} + \gamma_i + 1} = \frac{kX + i}{kX + i - 1}, \quad \text{und} \quad \frac{\alpha_{q_j} + \gamma'_j + 1}{\beta_{q_j} + \gamma'_j + 1} = \frac{\ell X + j - 1}{\ell X + j}$$

für alle $1 \leq i \leq k$ und $1 \leq j \leq \ell$ gilt. Für $n = \left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{\gamma_i}\right) \cdot \left(\prod_{j=1}^{\ell} q_j^{\gamma'_j}\right)$ folgt nun mit Verwendung der allgemein bekannten Formel

$$\tau\left(\prod_p p^{\eta_p}\right) = \prod_p (\eta_p + 1),$$

dass

$$\frac{\tau(na)}{\tau(nb)} = \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{\alpha_{p_i} + \gamma_i + 1}{\beta_{p_i} + \gamma_i + 1}\right) \cdot \left(\prod_{j=1}^{\ell} \frac{\alpha_{q_j} + \gamma'_j + 1}{\beta_{q_j} + \gamma'_j + 1}\right) = \frac{k(X+1)}{kX} \cdot \frac{\ell X}{\ell(X+1)} = 1,$$

also ist n wie behauptet. □

Aufgabe 2. Entscheiden Sie, ob es eine Menge M positiver ganzer Zahlen gibt, die folgende Eigenschaft hat: Für jede positive rationale Zahl $r < 1$ existiert **genau eine** endliche Teilmenge S von M, sodass $\sum_{s \in S} 1/s = r$ gilt, das heißt die Summe der Kehrwerte aller Elemente von S ist gleich r.

Lösung. Eine solche Menge existiert nicht, was wir mithilfe eines Widerpsruchsbeweises zeigen werden. Angenommen, S hat die angegebene Eigenschaft. Offenbar ist M dann unendlich, und wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $1 \notin M$. Wir bezeichnen die Elemente von M der Größe nach geordnet mit $m_1 < m_2 < m_3 < \dots$.
Fall 1: Es gilt $m_i \geq 2m_{i-1}$ für alle $i \geq 2$. Dann gilt $m_i \geq 2^{i-1}m_1$ für alle $i \geq 1$, und es folgt

$$r^* := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{m_i} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i m_1} = \frac{2}{m_1},$$

das heißt falls $m_1 \geq 3$ oder $m_i > 2m_{i-1}$ für mindestens ein i erfüllt ist, dann gilt $r^* < 1$. In diesem Fall erfüllt M jedoch entgegen der Annahme nicht die im Aufgabentext angegebene Bedingung, falls $s \in (r^*, 1)$ gewählt wird. Somit muss $m_1 = 2$ und $m_i = 2m_{i-1}$ für alle i gelten, also besteht M genau aus den Zweierpotenzen größer als 1. Da sich $1/3 = \sum_{i=2}^{\infty} 2^{-i}$ aber nicht als endliche Summe von Kehrwerten von Zweierpotenzen schreiben lässt, ergibt sich auch in diesem Fall ein Widerspruch.
Fall 2: Es existiert ein $i > 1$, sodass $m_i < 2m_{i-1}$. Wir betrachten

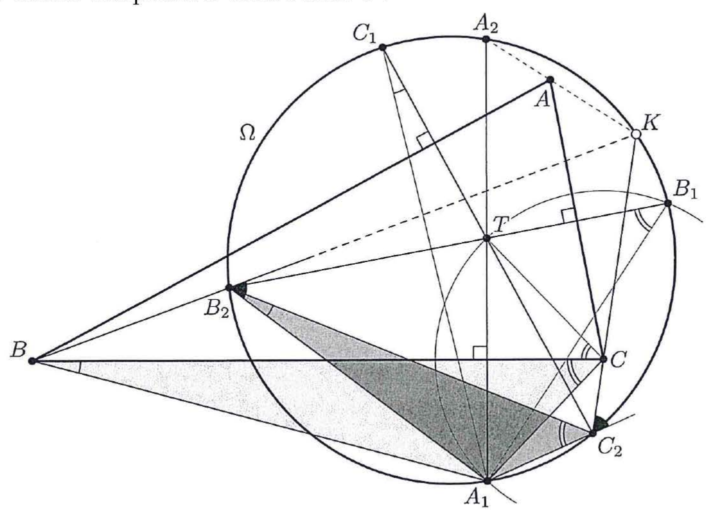
$$r := \frac{1}{m_{i-1}} - \frac{1}{m_i} < \frac{1}{m_i}.$$

Nach Annahme existiert eine endliche Teilmenge $S \subset M$, sodass $\sum_{s \in S} 1/s = r$ gilt. Wegen $s < 1/m_i$ gilt $m_i \notin S$. Damit sind aber $S_1 = S \cup \{m_i\}$ und $S_2 = \{m_{i-1}\}$ zwei verschiedene endliche Teilmengen von M, sodass die Summen der Kehrwerte von S_1 und S_2 den Wert $1/m_{i-1}$ ergeben, was ein Widerspruch ist. □

Aufgabe 3. Wir betrachten ein Dreieck ABC und einen Punkt P in dessen Inneren. Die Spiegelpunkte von P an den Seiten $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ und $\overline{AB}$ seien mit A_1, B_1 und C_1 bezeichnet. Ferner sei Ω der Umkreis des Dreiecks $A_1B_1C_1$ und schließlich seien A_2, B_2 und C_2 die zweiten Schnittpunkte der Geraden A_1P, B_1P und C_1P mit Ω. Beweisen Sie, dass sich die drei Geraden AA_2, BB_2 und CC_2 auf Ω schneiden.

Lösung. Wir arbeiten mit gerichteten Winkeln modulo 180°.

In dieser Skizze entspricht T dem Punkt P.



Schritt 1: Zunächst stellen wir fest, dass es sich bei CA und CB um die Mittelsenkrechten der Strecken $\overline{PB_1}$ und $\overline{PA_1}$ handelt, also ist C der Umkreismittelpunkt des Dreiecks PA_1B_1 und es folgt

$$\measuredangle A_1CB = \frac{1}{2}\measuredangle A_1CP = \measuredangle A_1B_1P = \measuredangle A_1B_1B_2 = \measuredangle A_1C_2B_2.$$

Schritt 2: Analog wie in Schritt 1 folgt, dass $\measuredangle A_1BC = \measuredangle A_1B_2C_2$, also sind die Dreiecke A_1BC und $A_1B_2C_2$ ähnlich.

Schritt 3: Unter Benutzung der soeben bewiesenen Ähnlichkeit folgt

$$\measuredangle CA_1B = \measuredangle C_2A_1B_2 \quad \text{und} \quad \frac{|A_1C|}{|A_1B|} = \frac{|A_1C_2|}{|A_1B_2|},$$

und somit auch

$$\measuredangle B_2A_1B = \measuredangle C_2A_1C \quad \text{und} \quad \frac{|A_1B_2|}{|A_1B|} = \frac{|A_1C_2|}{|A_1C|},$$

also sind auch die Dreiecke A_1B_2B und A_1C_2C ähnlich.
Schritt 4: Es sei K der Schnittpunkt von C_2C mit Ω. Dann gilt $180^\circ - \measuredangle A_1B_2K = \measuredangle A_1C_2K = \measuredangle A_1C_2C = \measuredangle A_1B_2B$, also liegt K auf der Geraden BB_2. Analog kann man zeigen, dass K auch auf der Geraden AA_2 liegt, was den Beweis beendet. $\square$