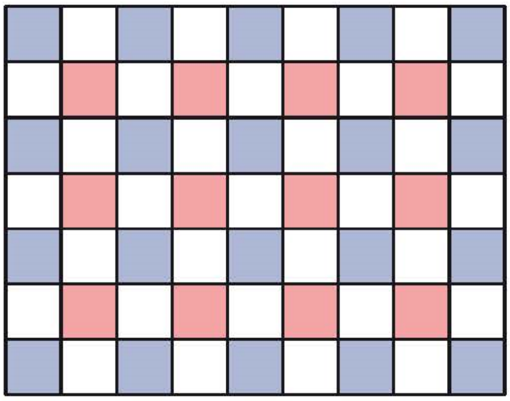
Lösungen zur 1. Auswahlklausur 2017/2018

Aufgabe 1. Ein Rechteck $\mathcal{R}$ mit ungeraden ganzzahligen Seitenlängen ist in Rechtecke unterteilt, die alle ganzahlige Seitenlängen haben. Man beweise, dass für mindestens eines dieser Rechtecke die Abstände zu jeder der vier Seiten von $\mathcal{R}$ alle gerade oder alle ungerade sind.

Lösung. Wir unterteilen $\mathcal{R}$ in Einheitsquadrate und färben einige dieser Einheitsquadrate in rot oder blau ein, entsprechend der folgenden Illustration.



Da $\mathcal{R}$ laut Voraussetzung ungerade Seitenlängen hat, sind alle vier Eckfelder von $\mathcal{R}$ blau gefärbt, und es gibt insgesamt mehr gefäbte als ungefärbte Felder. Somit enthält auch mindestens eines der Rechtecke $\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_k$, in die $\mathcal{R}$ unterteilt wurde, mehr gefärbte als ungefärbte Felder, sei $\mathcal{R}_i$ ein solches. Dann hat $\mathcal{R}_i$ ungerade Seitenlängen und alle vier Eckfelder von $\mathcal{R}_i$ sind gefärbt. Daraus folgt, dass alle vier Eckfelder von $\mathcal{R}_i$ dieselbe Farbe tragen müssen. Falls sie blau sind, hat $\mathcal{R}_i$ gerade Abstände zu allen vier Seiten von $\mathcal{R}$; falls sie rot sind hat $\mathcal{R}_i$ ungerade Abstände zu allen vier Seiten von $\mathcal{R}$. In jedem Fall erfüllt $\mathcal{R}_i$ die geforderte Bedingung. $\square$

Aufgabe 2. Es sei eine positive ganze Zahl d und eine Folge $(a_i)_{i=1,2,3,\ldots}$ positiver ganzer Zahlen gegeben. Wir nehmen an, dass folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

- Jede positive ganze Zahl taucht genau einmal in der Folge auf.
- Für alle Indizes $i \geq 10^{100}$ gilt $|a_{i+1} - a_i| \leq 2d$.

Man beweise, dass unendlich viele Indizes j existieren, für die $|a_j - j| < d$ gilt.

Lösung. Angenommen, die Behauptung wäre nicht erfüllt. Dann existiert ein Index $N > 10^{100}$, sodass für alle $i \geq N$ entweder $a_i \leq i - d$ oder $a_i \geq i + d$ gilt. Im ersten Fall gilt wegen $i \geq N > 10^{100}$ laut der zweiten Voraussetzung an die Folge auch

$$a_{i+1} \leq a_i + 2d \leq i - d + 2d = (i+1) + (d-1),$$

es muss also $a_{i+1} \leq (i+1) - d$ gelten. Induktiv folgt damit $a_j \leq j - d$ für alle $j \geq i$.

Damit haben wir gezeigt:

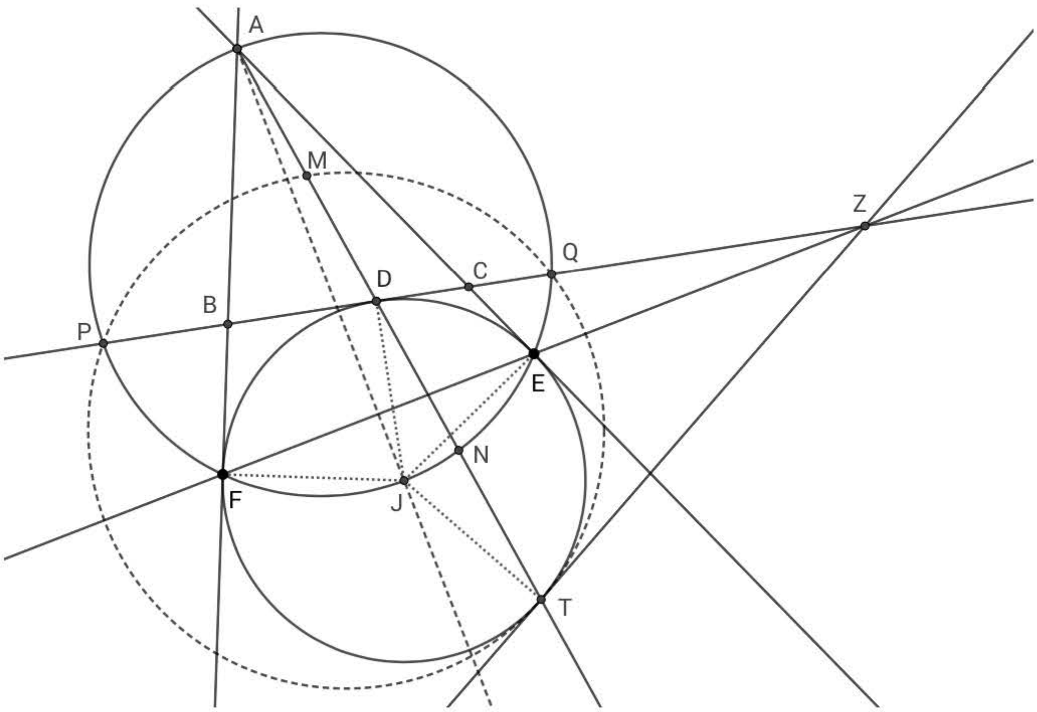
(A) Entweder es gilt $a_i \geq i + d$ für alle $i \geq N$, oder

(B) es existiert ein $M \geq N$, sodass $a_i \leq i - d$ für alle $i \geq M$ gilt.

Nehmen wir zunächst an, (A) sei erfüllt. Die Zahlen $1, \ldots, N$ müssen laut der ersten Voraussetzung an die Folge alle einmal in der Folge auftauchen. Nun gilt jedoch $a_i \geq i + d > i \geq N$ für alle $i \geq N$, das heißt es gibt nur die $N - 1$ Folgenglieder $a_1, \ldots, a_{N-1}$, die einen dieser Werte annehmen können. Nach dem Schubfachprinzip ergibt sich ein Widerspruch.
Nehmen wir nun an, (B) sei erfüllt. Es sei $k = \max\{M, a_1, \ldots, a_M\}$. Dann sind die k Folgenglieder $a_1, \ldots, a_k$ alle kleiner als k, denn für $i = 1, \ldots M - 1$ gilt $a_i \leq \max\{a_1, \ldots, a_{M-1}\} \leq k$ und für $i = M, \ldots, k$ gilt $a_i \leq i - d < i \leq k$. Diese k Zahlen liegen damit alle in der Menge $\{1, 2, \ldots, k - 1\}$. Nach dem Schubfachprinzip existieren daher zwei Indizes $1 \leq i < j \leq k$ mit $a_i = a_j$, was er ersten Voraussetzung an die Folge widerspricht.
Da wir in jedem Fall einen Widerspruch erhalten haben, gilt die Behauptung. □

Aufgabe 3. Es sei ABC ein Dreieck. Der dem Punkt A gegenüberliegende Ankreis ω berühre die Strecke $\overline{BC}$ sowie die Strahlen AC und AB in den Punkten D, E bzw. F. Der Umkreis des Dreiecks AEF schneide die Gerade BC in den Punkten P und Q. Schließlich sei M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AD}$. Man beweise, dass sich ω und der Umkreis des Dreiecks MPQ berühren

Lösung. Es sei J der Mittelpunkt des Ankreises ω. Dann gilt $JE \perp AE$ und $JF \perp AF$, der Thaleskreis Ω von $\overline{AJ}$ verläuft also durch E und F, und damit auch durch P und Q. Der Strahl AD schneide Ω und ω erneut in N bzw. T.



Dann ist JN die Lotgerade von J auf DT, also ist N der Mittelpunkt der Strecke $\overline{DT}$. Damit gilt laut dem Sehnensatz

$$|DM| \cdot |DT| = 1/2 \cdot |DA| \cdot |DT| = |DA| \cdot |DN| = |DP| \cdot |DQ|,$$

der Punkt T liegt nach der Umkehrung des Sehnensatzes also auf dem Umkreis des Dreiecks MPQ. Wir betrachten nun den Bildpunkt von N bei Inversion am Kreis ω, dieser sei mit Z bezeichnet. Da die Thaleskreise über $\overline{JD}$ und $\overline{JT}$ beide durch den Punkt N verlaufen, liegt Z auf den Bildern dieser Kreise, also den Tangenten durch D und T an ω. Auf ersterer Geraden liegen auch B, C, P und Q. Ferner liegt N auf dem Kreis Ω, der bei der betrachteten Inversion in die Gerade EF übergeht, also liegt auch Z auf der Geraden EF. Damit gilt nach dem Sekantensatz

$$|ZT|^2 = |ZE| \cdot |ZF| = |ZP| \cdot |ZQ|,$$

nach der Umkehrung des Sekantensatzes tangiert ZT daher auch den Umkreis des Dreiecks MPQ. Damit haben wir beweisen, dass sich dieser Kreis und ω im Punkt T berühren. $\square$

Lösungen zur 2. Auswahlklausur 2017/2018

Aufgabe 1
Es seien $a_1, a_2, ..., a_n, k$ und M positive ganze Zahlen mit den Eigenschaften

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} = k \qquad \text{und} \qquad a_1 a_2 ... a_n = M.$$

Man beweise: Für $M > 1$ hat das Polynom

$$P(x) = M(x+1)^k - (x+a_1)(x+a_2)...(x+a_n)$$

keine positiven Lösungen.

Lösung: Wir zeigen $P(x) < 0$ für alle $x > 0$, also $M(x+1)^k < (x+a_1)...(x+a_n) \Leftrightarrow$

$a_1 a_2 ... a_n (x+1)^{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}} < (x+a_1)...(x+a_n) \Leftrightarrow \prod_{i=1}^{n} a_i (x+1)^{\frac{1}{a_i}} < \prod_{i=1}^{n} (x+a_i)$.

Dazu zeigen wir, dass für jedes i ($(1 \le i \le n)$ die Beziehung $a_i(x+1)^{\frac{1}{a_i}} \le x + a_i$ (1) gilt und für wenigstens ein i sogar $a_i(x+1)^{\frac{1}{a_i}} < x + a_i$ ist. Die Behauptung folgt dann durch Multiplikation für alle i.

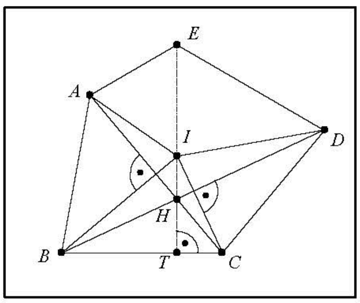
Aus der AM-GM-Ungleichung für die Zahlen $x+1, 1, 1, ..., 1$ ($a_i - 1$ Summanden 1) folgt $\frac{x+a_i}{a_i} \ge \sqrt[a_i]{x+1}$, was nach Multiplikation mit a_i gerade (1) ergibt. Das Gleichheitszeichen gilt genau für $a_i = 1$, was nicht für alle i sein kann, denn dann wäre $M = 1$, im Widerspruch zur Voraussetzung $M > 1$. Da für die gegebenen Werte alle Umformungen erlaubt sind, ist alles gezeigt. $\square$

Hinweis: Weitere Beweisansätze über die Bernoulli-Ungleichung, den binomischen Satz, die Jensensche Ungleichung oder Analysis sind möglich. Der Begriff „Lösung" in der Aufgabenstellung steht natürlich synonym zu „Nullstelle".

Aufgabe 2
Es sei $ABCDE$ ein konvexes Fünfeck mit den Eigenschaften

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}, \ \angle BAE = \angle DCB \ \text{und} \ \angle EDC = \angle CBA.$$

Man beweise, dass die Lotgerade von E auf BC durch den Schnittpunkt von AC und BD verläuft.



Lösung: Wegen der Voraussetzungen sind ΔABC und ΔBCD gleichschenklig. Daher geht die Mittelsenkrechte zu AC durch B und die Mittelsenkrechte zu BD durch C. Beide schneiden sich im Punkt I (siehe Figur).
Wegen $BD \perp CI$ und $AC \perp BI$ schneiden sich AC und BD im Höhenschnittpunkt des Dreiecks BCI und es folgt $IH \perp BC$. Wenn wir nun zeigen können, dass $EI \perp BC$ ist, folgt die Behauptung, weil es durch I nur eine Orthogonale zu BC geben kann.
Weil BI und CI auch Winkelhalbierende von $\angle CBA$ bzw. $\angle DCB$ sind, folgt $\overline{IA} = \overline{IC}$ sowie $\overline{IB} = \overline{ID}$. Wegen $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$ sind die Dreiecke ABI, BCI und CDI kongruent. Daher ist $\angle BAI = \angle ICB = \frac{1}{2}\angle DCB = \frac{1}{2}\angle BAE$, so dass IA Winkelhalbierende von $\angle BAE$ ist. Analog gilt, dass ID Winkelhalbierende von $\angle EDC$ ist.

Die Verkettung der Achsenspiegelungen an *AI*, *BI*, *CI*, *DI* und *EI* ist eine Achsenspiegelung mit den Fixpunkten *E* und *I*. Daher liegt *I* auch auf der Winkelhalbierenden von $\angle AED$.
Nun gilt $\angle AED = 540° - 2\angle CBA - 2\angle BAE$, und damit folgt im Viereck *ABIE*:
$\angle BIE = 360° - \angle BAE - \angle IBA - \angle AEI = 360° - \angle BAE - \frac{1}{2}\angle CBA - (270° - \angle CBA - \angle BAE)$
$= 90° + \frac{1}{2}\angle CBA = 90° + \angle CBI$. Mit dem Außenwinkelsatz folgt $EI \perp BC$. □

Hinweis: Es gibt andere Lösungswege über die Schnittpunkte der Verlängerungen geeigneter Seiten, mithilfe von Trigonometrie oder (in der Regel sehr aufwändig) analytischer Geometrie. Fehler entstanden z.T. durch Verwendung der Behauptung im Beweis, etwa durch Nicht-Unterscheiden der Geraden *ET* und *IT*.

Aufgabe 3
Man bestimme alle ganzen Zahlen $n \geq 2$ mit der folgenden Eigenschaft:
Für beliebige, nicht notwendigerweise verschiedene ganze Zahlen $m_1, m_2, ..., m_n$, deren Summe nicht durch *n* teilbar ist, existiert ein Index *i* ($1 \leq i \leq n$), so dass keine der Zahlen

$$m_i, m_i + m_{i+1}, m_i + m_{i+1} + m_{i+2}, ..., m_i + m_{i+1} + ... + m_{i+n-1}$$

durch *n* teilbar ist. (Dabei sei $m_i = m_{i-n}$ für $i > n$.)

Lösung: Bei den gesuchten Zahlen handelt es sich genau um die Primzahlen.

Teilbeweis 1: Keine Nichtprimzahl erfüllt alle Voraussetzungen.
Es sei $n = a \cdot b$ mit $1 < a, b < n$ eine Zerlegung von *n* in zwei echte Teiler. Wir wählen $m_i = a$ für $1 \leq i < n$ sowie $m_n = 0$. Dann ist die Summe $m_1 + m_2 + ... + m_n = (n-1)a$ offensichtlich nicht durch *n* teilbar, da beide Faktoren nicht durch *n* teilbar sind.
Nun wählen wir zu einem beliebigen Index *i* den Index $j = \begin{cases} b & \text{für } 1 \leq i \leq n-b \\ b+1 & \text{für } n-b < i \leq n \end{cases}$ und erhalten
$m_i + m_{i+1} + ... + m_{i+j-1} = a \cdot b = n \equiv 0 \bmod n$. Mit diesem Gegenbeispiel ist der Teilbeweis abgeschlossen.

Teilbeweis 2: Jede Primzahl erfüllt alle Voraussetzungen.
Es sei nun *n* eine Primzahl. Für einen Widerspruchsbeweis nehmen wir an, dass es für die Zahlen $m_1, m_2, ..., m_n$, deren Summe nicht durch *n* teilbar ist, zu jedem Index *i* $(1 \leq i \leq n)$ eine Zahl *j* $(1 \leq j \leq n)$ gibt, so dass die Summe $m_i + m_{i+1} + ... + m_{i+j-1}$ durch *n* teilbar ist. Dabei gilt sogar $j \neq n$, denn die Summe aller m_i ist nicht durch *n* teilbar.
Nun konstruieren wir für $0 \leq k \leq n-1$ eine endliche Folge ganzer Zahlen $i_0, i_1, ..., i_n$ mit $i_{k+1} - i_k \leq n-1$ (1), indem wir $m_{i_k+1} + m_{i_k+2} + ... + m_{i_{k+1}} \equiv 0 \bmod n$ wählen. Der Startindex i_0 ist beliebig und der neue Index i_{k+1} sei der jeweils kleinstmögliche nach i_k beim zyklischen Weitergehen mod *n*.
Nach dem Schubfachprinzip gibt es in der Folge dieser $n+1$ Indizes zwei verschiedene Zahlen i_r und i_s mit $0 \leq r < s \leq n$, die mod *n* kongruent sind. Mit ihnen gilt $\sum_{j=r}^{s-1} (m_{i_j+1} + m_{i_j+2} + ... + m_{i_{j+1}}) \equiv 0 \bmod n$, weil dies für jede Klammersumme gilt.
Andererseits folgt aus $i_s \equiv i_r \bmod n$, dass es eine positive ganze Zahl *d* gibt mit $i_s - i_r = d \cdot n$. Wegen (1) ist $i_s - i_r \leq (n-1)n$, so dass $d \leq n-1$ folgt. Dann kann $\sum_{j=r}^{s-1} (m_{i_j+1} + m_{i_j+2} + ... + m_{i_{j+1}}) = d(m_1 + m_2 + ... + m_n)$ aber kein Vielfaches von *n* sein, denn *n* ist prim und weder *d* noch $m_1 + m_2 + ... + m_n$ sind Vielfache von *n* – Widerspruch! □