Lösungen zur 1. Auswahlklausur 2016/2017

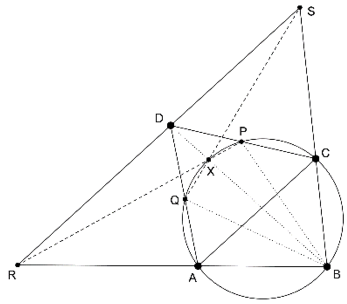
1. Aufgabe. Gegeben seien positive ganze Zahlen k und n mit $n > k$. Unter einem *Binärwort* der Länge n verstehen wir eine Folge aus n Folgengliedern, die alle 0 oder 1 sind. Anja wählt unter allen möglichen Binärwörtern der Länge n eines aus. Dann schreibt sie alle Binärwörter der Länge n, die sich von ihrem gewählten Wort an genau k Stellen unterscheiden, an eine Tafel. Anschließend betritt Bernhard den Raum. Anja nennt ihm den Wert von k und danach betrachtet er die Binärwörter an der Tafel. Er versucht nun das zu Beginn von Anja gewählte Binärwort zu erraten. Was ist (in Abhängigkeit von k und n) die minimale Anzahl an Versuchen, die Bernhard benötigt um das Binärwort mit Sicherheit zu erraten?

Lösung. Die Antwort lautet: Falls $n \neq 2k$ kann Bernhard das von Anja gewählte Wort stets im ersten Versuch erraten, im Fall $n = 2k$ braucht er zwei Versuche um das Wort mit Sicherheit zu erraten. Wir bezeichnen das von Anja zu Beginn gewählte Wort mit u.

Fall 1: $n \neq 2k$. Es sei $1 \leq i \leq n$ beliebig. Von allen $\binom{n}{k}$ Wörtern an der Tafel stimmen genau $\binom{n-1}{k}$ an der i-ten Stelle mit u überein und $\binom{n-1}{k-1}$ sind an der i-ten Stelle verschieden von u. Einfaches Nachrechnen zeigt, dass im Fall $n \neq 2k$ auch $\binom{n-1}{k} \neq \binom{n-1}{k-1}$ gilt, das heißt Bernhard kann durch das Betrachten der i-ten Stellen aller Wörter an der Tafel auf die i-te Stelle von u schließen. Da dies für alle $i = 1, \ldots, n$ funktioniert, kann Bernhard das von Anja zu Beginn gewählte Wort u eindeutig bestimmen und errät es auf diese Weise im ersten Versuch. **Fall 2**: $n = 2k$. Wir zeigen zunächst, dass Bernhard nicht eindeutig auf u schließen kann, also möglicherweise mehr als einen Versuche benötigt. Angenommen, Anja hätte das (eindeutige) Binärwort $\overline{u}$ gewählt, dass sich an allen Stellen von ihrem tatsächlichen Wort u unterscheidet. Ein beliebiges Binärwort der Länge n stimmt genau dann in $k = n/2$ Stellen mit u überein, wenn es in $k = n/2$ Stellen mit $\overline{u}$ übereinstimmt, das heißt Anja hätte in diesem Fall exakt die gleichen Binärwörter an die Tafel geschrieben. Dies bedeutet, dass Bernhard keine Möglichkeit hat zwischen u und $\overline{u}$ zu unterscheiden und in seinem ersten Versuch Anjas Wort zu raten möglicherweise falsch liegt. Wir zeigen nun, dass Bernhard in zwei Versuchen stets Erfolg haben kann. Dazu genügt es zu beweisen, dass für jedes von u und $\overline{u}$ verschiedene Binärwort w der Länge n die Menge aller Binärwörter der Länge n, die sich an genau $k = n/2$ Stellen von w unterscheiden, nicht identisch mit der Menge der Wörter an der Tafel ist. Dazu dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen dass sich w von u an genau a Stellen unterscheidet, wobei $0 < a \leq k = n/2$ (sonst betrachte $\overline{u}$ statt u). Dann können wir genau k der übrigen $n - a \geq k$ Stellen abändern und erhalten ein Wort w', das sich an genau k Stellen von w unterscheidet, aber an $a + k > k$ Stellen von u, das heißt es steht nicht an der Tafel. □

2. Aufgabe. Es sei $ABCD$ ein konvexes Viereck. Die Diagonale BD halbiere den Winkel $\measuredangle CBA$. Der Umkreis des Dreiecks ABC schneide die Strecken $\overline{CD}$ und $\overline{DA}$ in den inneren Punkten P bzw. Q. Die durch den Punkt D verlaufende Parallele zur Geraden AC schneide die Geraden BA und BC in den Punkten R bzw. S. Man beweise, dass die vier Punkte P, Q, R und S auf einem gemeinsamen Kreis liegen.

Lösung. **Schritt 1**: Wegen $\measuredangle BRD = \measuredangle BAC = \measuredangle BPC = \pi - \measuredangle DPB$ ist $BPDR$ ein Sehnenviereck. Analog zeigt man, dass auch $BSDQ$ ein Sehnenviereck ist. **Schritt 2**: Es sei X definiert als der Schnittpunkt von BD mit dem Umkreis des Dreiecks ABC. Dann gilt $\measuredangle DPX = \pi - \measuredangle XPC = \measuredangle CBX = 1/2\measuredangle CBA$. Da nach Schritt 1 auch $\measuredangle DPR = \measuredangle DBR = 1/2\measuredangle DBA$ gilt, liegt X auf PR. Analog zeigt man, dass X auch auf QS liegt. **Schritt 3**: Wir kombinieren die Erkenntnisse und rechnen (mithilfe des Sehnensatzes) $|PX| \cdot |XR| = |BX| \cdot |XD| = |QX| \cdot |XS|$. Mit der Umkehrung des Sehnensatzes folgt nun die Behauptung. □



3. Aufgabe. Die Menge der positiven ganzen Zahlen sei mit $\mathbb{N}$ bezeichnet. Man bestimme alle Funktionen $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit der folgenden Eigenschaft: Für alle positiven ganzen Zahlen m und n ist die Zahl $f(m) + f(n) - mn$ von 0 verschieden und ist ein Teiler der Zahl $mf(m) + nf(n)$.

Lösung. **Antwort**: Es gibt genau eine Funktion, die die beschriebene Bedingung erfüllt, nämlich $f(k) = k^2$ für alle k. Zum Beweis sei f wie verlangt. **Schritt 1**: Einsetzen von $m = n = 1$ liefert $2f(1) - 1 \mid 2f(1)$, also auch $2f(1) - 1 \mid 2f(1) - (2f(1) - 1) = 1$ und damit $2f(1) - 1 = 1$, also $f(1) = 1$. **Schritt 2**: Von nun an stehe p stets für eine Primzahl mit $p \geq 7$. Einsetzen von $m = n = p$ liefert $2f(p) - p^2 \mid 2pf(p)$ und damit auch $2f(p) - p^2 \mid 2pf(p) - p(2f(p) - p^2) = p^3$, also

$$2f(p) - p^2 \in \{-p^3, -p^2, -p, -1, 1, p, p^2, p^3\}.$$

Da $f(p) > 0$ folgt

$$f(p) \in \left\{\frac{p^2-p}{2}, \frac{p^2-1}{2}, \frac{p^2+1}{2}, \frac{p^2+p}{2}, p^2, \frac{p^3+p^2}{2}\right\}.$$

Schritt 3: Wir setzen $m = 1$, $n = p$ und erhalten $f(p) + 1 - p \mid pf(p) + 1$, also auch $f(p)+1-p \mid pf(p)+1-p(f(p)+1-p) = p^2-p+1$. Angenommen, es gilt $f(p) \neq p^2$. Dann folgt (beachte, dass p^2-p+1 ungerade ist) notwendigerweise $f(p)+1-p \leq 1/3(p^2-p+1)$. Nach Schritt 2 gilt jedoch $f(p) \geq (p^2-p)/2$, es folgt also

$$\begin{aligned}
\frac{p^2-p}{2} + 1 - p &\leq \frac{p^2-p+1}{3} \\
3p^2 - 3p + 6 - 6p &\leq 2p^2 - 2p + 1 \\
p^2 + 5 &\leq 7p,
\end{aligned}$$

was für $p \geq 7$ nicht der Fall ist. Also war die obige Annahme falsch und es muss $f(p) = p^2$ gelten. **Schritt 4**: Es sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir setzen $m = p$ und erhalten $f(n)+p^2-pn \mid p^3+nf(n)$, also auch $f(n)+p^2-pn \mid p^3+nf(n)-n(f(n)-p^2-pn) = p(p^2-pn+n^2)$. Für alle hinreichend großen Primzahlen p ist $f(n)$ und damit auch die linke Seite des letzten Ausdrucks nicht durch p teilbar, daher folgt $f(n)+p^2-pn \mid p^2-pn+n^2$ und somit auch $f(n)+p^2-pn \mid (f(n)+p^2-pn)-(p^2-pn+n^2) = f(n)-n^2$. Da die linke Seite beliebig groß werden kann (es gibt unendlich viele Primzahlen) folgt $f(n) - n^2 = 0$ und damit $f(n) = n^2$. **Schritt 5**: Die Probe bestätigt dass $f(k) = k^2$ für alle $k \in \mathbb{N}$ tatsächlich die Bedingung erfüllt: Es gilt $f(m) + f(n) - mn = m^2 + n^2 - mn \geq 2mn - mn = mn > 0$, und außerdem gilt $(m^2 + n^2 - mn)(m + n) = m^3 + n^3 = mf(m) + nf(n)$, das heißt $f(m) + f(n) - mn$ ist von 0 verschieden und ist ein Teiler der Zahl $mf(m) + nf(n)$. □

Lösungen zur 2. Auswahlklausur 2016/2017

Aufgabe 1
Man bestimme die kleinste reelle Konstante C mit folgender Eigenschaft:
Für fünf beliebige positive reelle Zahlen a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, die nicht unbedingt verschieden sein müssen, lassen sich stets paarweise verschiedene Indizes i, j, k, l finden, so dass
$\left|\frac{a_i}{a_j} - \frac{a_k}{a_l}\right| \le C$ gilt.

Lösung: Der gesuchte Wert ist $C = \frac{1}{2}$.
Zunächst beweisen wir, dass $C \le \frac{1}{2}$ gilt. Dazu nehmen wir oBdA $a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4 \le a_5$ an und betrachten die fünf Brüche $\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_3}{a_4}, \frac{a_1}{a_5}, \frac{a_2}{a_3}, \frac{a_4}{a_5}$. Nach dem Schubfachprinzip liegen in einem der Intervalle $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ bzw. $\left]\frac{1}{2}, 1\right]$ drei verschiedene dieser Brüche, wobei zwei von diesen in der Aufzählung direkt aufeinanderfolgen oder der erste und der letzte Bruch dabei sind. Jedenfalls ist die positive Differenz dieser beiden Brüche kleiner als $\frac{1}{2}$ und die vier beteiligten Indizes sind paarweise verschieden.
Nun zeigen wir, dass $C \ge \frac{1}{2}$ gilt. Dazu betrachten das Beispiel 1, 2, 2, 2, r, wobei r eine Riesenzahl sein soll. Mit diesen Zahlen lassen sich – der Größe nach geordnet – die Brüche $\frac{1}{r}, \frac{2}{r}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{2}{1}, \frac{r}{2}, \frac{r}{1}$ bilden, wobei nach der Aufgabenstellung $\frac{1}{r}$ und $\frac{2}{r}$ nicht gleichzeitig gewählt werden dürfen. Daher ist die kleinste positive Differenz gleich $\frac{1}{2} - \frac{2}{r}$, und dies nähert sich für $r \to \infty$ dem Wert $\frac{1}{2}$ von unten beliebig gut an. □

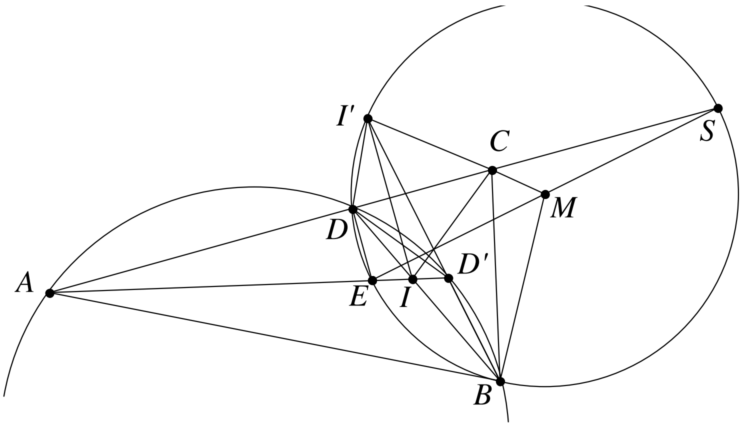
Aufgabe 2
Es sei n eine positive ganze Zahl, die teilerfremd zu 6 ist. Wir färben die Ecken eines regulären n-Ecks so mit drei Farben, dass für jede Farbe die Anzahl der mit ihr gefärbten Ecken ungerade ist.
Man beweise, dass es dann stets ein gleichschenkliges Dreieck gibt, dessen Ecken zu den Ecken des n-Ecks gehören und alle verschieden gefärbt sind.

Lösung: Es seien a_1, a_2, a_3 die Anzahlen der gleichschenkligen Dreiecke, in deren Eckpunkten genau 1, 2 bzw. 3 Farben vorkommen. Wir nehmen an, dass $a_3 = 0$ gelte. Die Farben seien rot, grün und blau, wobei r, g und b die (ungerade) Anzahl der jeweils so gefärbten Ecken bezeichnet. Wir bestimmen nun auf zwei Arten die Anzahl a der Paare (Δ, v), wobei Δ ein gleichschenkliges Dreieck mit mehr als einer Eckenfarbe und v eine Seitenkante dieses Dreiecks ist, deren Endpunkte mit verschiedenen Farben belegt sind.
Wegen $a_3 = 0$ müssen die Eckpunkte eines solchen Dreiecks mit genau zwei Farben belegt sein, von denen eine zu zwei Ecken gehört, die jeweils Endpunkte einer Seitenkante v sind. Also trägt jedes Dreieck zwei Paare bei und es ist $a = 2a_2$.
Zu je zwei Eckpunkten A und B gibt genau drei verschiedene Eckpunkte C, die mit A und B ein gleichschenkliges Dreieck bilden: entweder ist $AB=AC$ oder $AB=BC$ oder $AC=BC$. Dabei können keine dieser Möglichkeiten zusammenfallen, weil sonst ABC gleichseitig und n durch 3 teilbar wäre. $AC=BC$ existiert, weil n ungerade ist und daher die Mittelsenkrechte von AB durch genau einen weiteren Eckpunkt verläuft. Daher gilt, ausgehend von zwei verschieden gefärbten Eckpunkten A und B, dass $a = 3(rg + gb + br)$ ist. Dieser Term ist nach Voraussetzung ungerade, im Widerspruch zu $a = 2a_2$.
Daher muss $a_3 \ne 0$ gelten. □

Hinweis: Viele Lösungsansätze über eine Prozedur, mit der man immer neue Punkte geeignet färbt, enthielten Lücken, weil Schleifen oder Mehrfachbelegungen nicht vollständig untersucht worden sind.

Aufgabe 3
Es sei ABC ein Dreieck mit $AB = AC \neq BC$. Ferner sei I der Inkreismittelpunkt von ABC.
Die Gerade BI schneidet AC im Punkt D, und die Orthogonale zu AC durch D schneidet AI im Punkt E.
Man beweise, dass der Spiegelpunkt von I bei Spiegelung an der Achse AC auf dem Umkreis des Dreiecks BDE liegt.

Lösung: Zunächst beweisen wir (schon mit den zur Aufgabe passenden Bezeichnungen) folgendes
Lemma: Die Mittelsenkrechte einer Seite BI' und die Winkelhalbierende durch den dritten Eckpunkt D schneiden sich auf dem Umkreis jedes nicht gleichschenkligen Dreiecks $BI'D$. („Südpolsatz")
Beweis des Lemmas: Es sei M der Mittelpunkt des Umkreises von $BI'D$ und S der von D verschiedene Schnittpunkt der Winkelhalbierenden mit dem Umkreis. Dann ist $\angle BMI'$ als Mittelpunktswinkel doppelt so groß wie $\angle BDI'$ und $\angle SDI'$ halb so groß wie $\angle BDI'$. Da aber die Mittelsenkrechte von BI' beide Bögen des Umkreises zu dieser Sehne halbiert, muss sie durch S gehen. □
Korollar: Der andere Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von BI' mit dem Umkreis sei E. Dann liegt nach dem Lemma D auf dem Thaleskreis über ES und es ist $\angle EDS = 90°$ Somit ist DE die äußere Winkelhalbierende von $\angle BDI'$. Die Umkehrung gilt ebenfalls: Wenn für den Punkt E auf der äußeren Winkelhalbierenden von $\angle BDI'$ auch $BE = EI'$ gilt, dann liegt E auf dem Umkreis von $BI'D$.



Für den Hauptbeweis bezeichnen wir den Spiegelpunkt von I mit I' und den zweiten Schnittpunkt von AI und dem Umkreis des Dreiecks ABD mit D'. Weil AD' die Winkelhalbierende von $\angle BAD$ ist, liegt D' in der Mitte des Bogens BD und so gilt $DD' = BD' = CD'$.
Unter Verwendung des Umfangswinkelsatzes über der Sehne AD sowie geeigneter Winkelhalbierender erhalten wir $\angle DD'E = \angle DD'A = \angle DBA = \angle CBI = \angle ICB$. Weil D' wegen der gleichen Abstände der Umkreismittelpunkt des Dreiecks BCD ist, gilt $\angle EDD' = 90° - \angle D'DC = \angle CBD = \angle CBI$, also sind wegen $\angle CBI = \angle ICB$ die Dreiecke $ED'D$ und IBC ähnlich. Daraus folgt $\frac{BC}{CI'} = \frac{BC}{CI} = \frac{DD'}{D'E} = \frac{BD'}{D'E}$.
Außerdem gilt $\angle I'CB = \angle ACB + \angle I'CA = \angle ACB + \angle ACI = \angle ACB + \angle CBD = \angle BDA = \angle BD'E$, und daher sind die Dreiecke BCI' und $BD'E$ ähnlich, ebenso sind BCD' und $BI'E$ ähnliche Dreiecke, denn bei der Drehstreckung um B, die BCI' in $BD'E$ überführt, geht CD' in $I'E$ über.
Weil aber BCD' gleichschenklig ist, gilt auch $BE = EI'$.
Nun ist $DE \perp AC$, und nach dem Korollar liegt E auf dem Umkreis des Dreiecks $BI'D$. □

Hinweis: Es gibt viele weitere Lösungswege zu diesem Problem, die jedoch alle nicht mit einer einfachen Winkeljagd auskommen. Sämtliche analytischen Lösungsansätze waren wegen der immer komplexer werdenden Terme zum Scheitern verurteilt. In der Skizze schneiden sich MI' und DS in C; dies ist tatsächlich immer so.