Lösungen zur 2. Auswahlklausur 2015/2016

Aufgabe 1

Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen m mit folgender Eigenschaft:

Die Folge $a_0, a_1, a_2, \ldots$ mit $a_0 = \dfrac{2m+1}{2}$ und $a_{k+1} = a_k \lfloor a_k \rfloor$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$ enthält wenigstens eine ganze Zahl.

Hinweis: $\lfloor x \rfloor$ bezeichnet den größten ganzen Teil (*integer*-Funktion) von x.

Lösung: Es gilt $a_0 = m + \frac{1}{2}$ und $a_1 = a_0 \lfloor a_0 \rfloor = (m + \frac{1}{2}) \cdot m = m^2 + \frac{m}{2}$. Dieser Ausdruck ist für gerades m offensichtlich ganz, so dass hier die gesuchte Eigenschaft der Folge vorliegt.
Weiterhin gilt bei $m = 1$, dass $a_0 = \frac{3}{2}$, $\lfloor a_0 \rfloor = 1$ und für $a_k = \frac{3}{2}$ stets auch $a_{k+1} = \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}$ ist. Hier gibt es also kein ganzzahliges Folgenglied.
Nun sei $m \geq 3$ ungerade. Es existiert die eindeutige Darstellung $m = 2^p \cdot n_0 + 1$ mit $p \geq 1$, n_0 ungerade und $p, n_0 \in \mathbb{N}$. Somit gilt $a_0 = 2^p n_0 + \frac{3}{2}$, und für $a_k = 2^p n_k + \frac{3}{2}$ (n_k ungerade) folgt
$a_{k+1} = (2^p n_k + \frac{3}{2})(2^p n_k + 1) = 2^{p-1}(2^{p+1} n_k^2 + 5 n_k) + \frac{3}{2}$, wobei die Klammer ungerade ist. Also existiert eine Darstellung $a_{k+1} = 2^{p-1} n_{k+1} + \frac{3}{2}$ mit ungeradem n_{k+1}. Durch Erhöhen von k um 1 wird also gleichzeitig p um 1 vermindert, so dass $a_{k+p} = 2^0 n_{k+p} + \frac{3}{2}$ gilt und $\lfloor a_{k+p} \rfloor$ gerade ist. Dann ist a_{k+p+1} eine ganze Zahl, und so liegt auch für jedes $m \geq 3$ die gesuchte Eigenschaft der Folge vor. Damit gehören alle positiven ganzen Zahlen außer 1 zur gesuchten Menge.

Hinweis: Das gelegentlich praktizierte Rechnen mit „gebrochenen Restklassen“ modulo einer Zweierpotenz führte häufig zu Fehlern wie etwa der falschen Antwort, dass keine Zahlen mit Rest 1 mod 8 zur Menge gehören.

Aufgabe 2

Man bestimme alle Funktionen $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, die für alle $x, y \in \mathbb{Z}$ die Gleichung

$f(x - f(y)) = f(f(x)) - f(y) - 1$ (1) erfüllen.

Lösung: Die Gleichung (1) wird genau von den Funktionen $f_1: x \to -1$ und $f_2: x \to x + 1$ erfüllt. Durch Einsetzen wird leicht bestätigt, dass beide Funktionen Lösungen sind.
Nun sei f eine Funktion, die (1) für alle $x, y \in \mathbb{Z}$ erfüllt. Durch Einsetzen von $x = 0$ und $y = f(0)$ erhalten wir mit $z = -f(f(0))$, dass $f(z) = -1$ ist. Einsetzen von $y = z$ in (1) führt auf $f(x+1) = f(f(x))$ für alle $x \in \mathbb{Z}$ (2).
Damit vereinfachen wir (1) zu $f(x - f(y)) = f(x+1) - f(y) - 1$ (3).

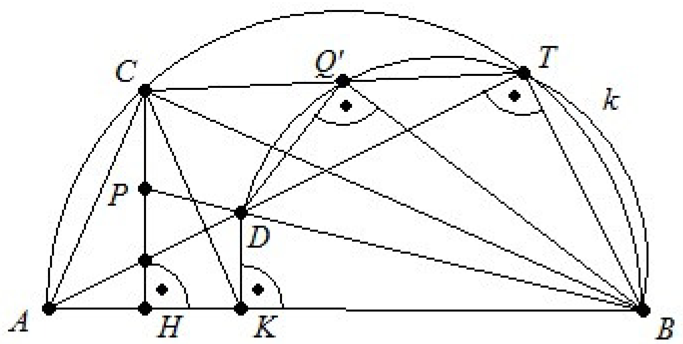
Mit $y = x$ in (3) und mit (2) ist $f(x+1) - f(x) = f(x - f(x)) + 1 = f(f(x-1-f(x))) + 1$.
Weil aus (3) folgt: $f(x-1-f(x)) = f(x) - f(x) - 1 = -1$, vereinfacht sich dies zu $f(x+1) = f(x) + f(-1) + 1 = f(x) + c$ mit konstantem *c*. Daher ist *f* linear und genügt dem Ansatz $f(x) = cx + b$ mit $b = f(0)$. Dies in (2) eingesetzt liefert $cx + c + b = c^2x + cb + b$ für alle $x \in \mathbb{Z}$. Für $x = 0$ und $x = 1$ erhalten wir $c + b = cb + b$ sowie $c^2 = c$; daraus folgt $c = 0$ oder $c = 1$. Aus $c = 1$ folgt $b = 1$ und wir erhalten f_2; aus $c = 0$ folgt, dass *f* konstant ist, und mit (1) ergibt sich $b = -1$, also f_1. Damit ist alles gezeigt.

Hinweis: Oft wurden zu Beginn Einschränkungen vorgenommen (z.B. dass $x = f(y)$ ist, also zur Wertemenge gehört), die später „vergessen" wurden. Die Angabe $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ wurde gelegentlich so missverstanden, dass die Wertemenge alle ganzen Zahlen umfasst.

Aufgabe 2

Es sei *ABC* ein rechtwinkliges Dreieck mit $\sphericalangle ACB = \gamma = 90°$. Ferner sei *H* der Fußpunkt der Höhe von *C* auf *AB*.
Nun wählen wir einen Punkt *D* so im Inneren des Dreiecks *HBC*, dass *CH* die Strecke *AD* halbiert, und bezeichnen den Schnittpunkt von *CH* und *BD* mit *P*. Über der Strecke *BD* als Durchmesser errichten wir denjenigen Halbkreis *k*, der von *BC* geschnitten wird. Eine Gerade durch *P* berührt *k* im Punkt *Q*.
Man beweise, dass sich die Geraden *CQ* und *AD* stets auf *k* schneiden.

Lösung: Wie in der Figur sei *K* der Fußpunkt des Lotes von *D* auf *AB* und *T* der Schnittpunkt von *AD* mit *k*. Wegen $\sphericalangle ATB = \sphericalangle ACB = 90°$ liegt *T* auch auf dem Umkreis von *ABC*. Wegen $CH \parallel DK$ gilt $|AH| = |HK|$.



Um nachzuweisen, dass *C*, *Q* und *T* kollinear sind, betrachten wir den Schnittpunkt Q' von *CT* mit *k* und müssen nur zeigen, dass PQ' *k* berührt, bzw. dass $\sphericalangle PQ'D = \sphericalangle Q'BD$ ist.
Weil $BTQ'D$ ein Sehnenviereck ist und die Dreiecke *AHC* und *HKC* kongruent sind, gilt $\sphericalangle Q'BD = \sphericalangle Q'TD = \sphericalangle CTA = \sphericalangle CBA = \sphericalangle ACH = \sphericalangle HCK$. Also sind die rechtwinkligen Dreiecke *CHK* und $BQ'D$ ähnlich, woraus $|HK|/|CK| = |Q'D|/|BD|$ folgt, also $|HK| \cdot |BD| = |CK| \cdot |Q'D|$ (1). Wegen $PH \parallel DK$ gilt $|PD|/|BD| = |HK|/|BK|$, also $|PD| \cdot |BK| = |HK| \cdot |BD|$ (2). Der Vergleich von (1) und (2) führt auf $|PD| \cdot |BK| = |CK| \cdot |Q'D|$ und somit $|PD|/|Q'D| = |CK|/|BK|$. Deswegen und weil $\sphericalangle CKA = \sphericalangle KAC = \sphericalangle BDQ'$ ist, sind die Dreiecke *CKB* und PDQ' ähnlich. Daher gilt $\sphericalangle PQ'D = \sphericalangle CBA = \sphericalangle Q'BD$, was zu zeigen war.

Hinweis: Eine reine Winkeljagd führt nicht zu Ziel; allerdings gibt es andere Beweismöglichkeiten, wie etwa Ausnutzen einer geeigneten Drehstreckung mit Zentrum *B*.