Lösungen zur 1. Auswahlklausur 2014/2015

Aufgabe 1
Man bestimme die kleinste positive ganze Zahl n, für die es ein Polynom

$$P(X) = a_{2n}X^{2n} + a_{2n-1}X^{2n-1} + \ldots + a_1X + a_0$$

mit reellen Koeffizienten gibt, das die beiden folgenden Eigenschaften aufweist:

- Für $i = 0, 1, \ldots, 2n$ gilt $2014 \leq a_i \leq 2015$.
- Es gibt eine reelle Zahl ξ mit $P(\xi) = 0$.

Lösung: Es ist $n = 2014$. Zunächst definiere für eine spezielle Wahl der Koeffizienten a_k, nämlich 2014 für gerades k und 2015 für ungerades k, das Polynom $Q_n(X) = 2014X^{2n} + 2015X^{2n-1} + 2014X^{2n-2} + \ldots + 2015X + 2014$. Es ist $Q_{2014}(-1) = 0$, die gesuchte Zahl ist also höchstens 2014. Es bleibt zu zeigen, dass $P(X)$ für $n \leq 2013$ keine reelle Nullstelle hat. Für $x \geq 0$ ist $P(x) \geq a_0 > 0$, da die Koeffizienten positiv sind; für $x < 0$ ist $P(x) \geq Q_n(x)$, da x^k für gerades k positiv ist, also $a_kx^k \geq 2014x^k$, und x^k für ungerades k negativ ist, also $a_kx^k \geq 2015x^k$. Es bleibt zu zeigen, dass $Q_m(x) > 0$ für $m \leq 2013$.
1. Beweis: Man rechnet nach, dass für reelles x gilt

$$Q_m(x) = 1007\Big(\sum_{\nu=0}^{m-1}(x^\nu + x^{\nu+1})^2\Big) + \frac{1}{2}\Big(\sum_{\nu=0}^{m-1}(x^{2\nu+1}+1)(x^{2m-2\nu-1}+1)\Big) + (1007 - \frac{m}{2})(x^{2m}+1).$$

Die Summanden der ersten Summe sind als Quadrate nicht negativ. Da $x^{2k+1} + 1$ für alle $k \geq 0$ positiv bzw. 0 bzw. negativ ist für $x > -1$ bzw. $x = -1$ bzw. $x < -1$, sind die Summanden in der zweiten Summe nicht negativ. Damit ist für $x < 0$ und $m \leq 2013$:

$$P(x) \geq Q_m(x) \geq (1007 - \frac{m}{2})(x^{2m} + 1) > \frac{1}{2}.$$

2. Beweis (mit Analysis): Definiere für $x < 0$ die reelle Funktion $f_m(x) = (x^2 - 1)Q_m(x) = 2014(x^{2m+2} - 1) + 2015x(x^{2m} - 1)$. Die zweite Ableitung $f_m''(x) = 2(2m+1)\big(2014(m+1)x^{2m} + 2015mx^{2m-1}\big)$ hat die einzige negative Nullstelle $x_m = -\frac{2015m}{2014(m+1)} > -1$ für $m \leq 2013$, und es ist

$$\begin{aligned} f_m'(x_m) &= 2014(2m+2)x_m^{2m+1} + 2015(2m+1)x_m^{2m} - 2015 = \\ &= (2014(2m+2)x_m + 2015(2m+1))x_m^{2m} - 2015 = 2015 \cdot x_m^{2m} - 2015 < 0. \end{aligned}$$

Für $x < x_m$ bzw. $x_m < x < 0$ wächst bzw. fällt f_m' streng monoton, da die Ableitung f_m'' positiv bzw. negativ ist; daher hat f_m' für $x < 0$ ein globales Maximum bei $x = x_m$ und ist negativ für alle $x < 0$. Daher fällt f_m streng monoton, ist also wegen $f_m(-1) = 0$ positiv für $x > -1$ und negativ für $x < -1$. Somit ist $Q_m(x)$ positiv für $x \neq -1$; für $x = -1$ ergibt sich direkt $Q_m(-1) = 2014 - m > 0$.

Bemerkungen:

1. Die Polynomfunktion $P(x)$ kann keine reellen Nullstellen außerhalb des Intervalls $]-\frac{2015}{2014}, -\frac{2014}{2015}[$ haben.
2. Oftmals wurden Summanden $g_k(x) = 2014x^{2k} + 2015x^{2k-1}$ von $Q_m(x)$ für einzelne k isoliert betrachtet und fehlerhaft gegen $g_k(-1)$ abgeschätzt. Wie man durch Ableiten zeigt, wächst bzw. fällt g_k streng monoton für $0 > x > -\frac{2015(2k-1)}{2014 \cdot 2k}$ bzw. $x < -\frac{2015(2k-1)}{2014 \cdot 2k}$. Daraus folgt $g_k(x) > g_k(-1)$ für $k \leq 1007$ und $x < -1$ oder für $k > 1007$ und $-1 > x > 0$. Damit kann man auf diese Weise $Q_m(x) \geq Q_m(-1)$ nur für $x < -1$ und $m \leq 1007$ nachweisen.

» Der Auswahlwettbewerb zur Internationalen Mathematik-Olympiade wird gefördert vom Bundesministerium für Bildung und Forschung. Träger ist Bildung & Begabung gemeinnützige GmbH.

» **BILDUNG & BEGABUNG GEMEINNÜTZIGE GMBH**
Kortrijker Straße 1, 53177 Bonn | Postfach 20 02 01, 53132 Bonn | Tel.: (02 28) 9 59 15-0, Fax: (02 28) 9 59 15-19
info@bildung-und-begabung.de, www.bildung-und-begabung.de | Registergericht: Amtsgericht Essen, HRB 22445
Steuer-Nr.: 206/5887/1089 | USt.-IDNr.: DE217481695 | Bankverbindung: IBAN: DE27 3705 0198 0029 0022 50
BIC: COLSDE33XXX, Sparkasse KölnBonn | Geschäftsführung: Dr. Elke Völmicke, Prof. Dr. Andreas Schlüter

GEFÖRDERT VOM
Bundesministerium für Bildung und Forschung
Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft
KMK KULTUSMINISTER KONFERENZ

Aufgabe 2
Eine positive ganze Zahl n heißt *neckisch*, wenn man sie in der Form $n = a^b + b$ mit zwei ganzen Zahlen $a, b \geq 2$ schreiben kann.
Man entscheide, ob es 102 aufeinanderfolgende positive ganze Zahlen gibt, von denen genau 100 neckisch sind.

Lösung: Es gibt solche Zahlen. Für eine positive ganze Zahl m sei $f(m)$ die Anzahl der neckischen Zahlen unter den 102 aufeinander folgenden Zahlen $m, m+1, m+2, \ldots, m+101$. Es sei N das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen $2, 3, 4, \ldots, 101$. Dann ist $f(2^N) \geq 100$, da für alle $b = 2, 3, \ldots, 101$ gilt: $2^N + b = (2^{N/b})^b + b$ ist neckisch. Somit gibt es auch eine kleinste positive Zahl M mit $f(M) \geq 100$. Offenbar ist $M \leq 2^N$. Andererseits gilt $M > 1$ (und $M - 1$ ist positive ganze Zahl), weil jede neckische Zahl größer als 5 ist, da für $a, b \geq 2$ gilt: $a^b + b \geq 2^b + b \geq 2^2 + 2 = 6$, und somit unter den Zahlen von 1 bis 102 höchstens 97 neckisch sind. Nun wird $f(M) = 100$ bewiesen: Wäre $f(M) > 100$, gäbe es unter den Zahlen von M bis $M + 101$ mindestens 101 neckische, also unter denen von M bis $M + 100$ mindestens 100 neckische ebenso wie unter denen von $M - 1$ bis $M + 100$. Dann wäre $f(M - 1) \geq 100$ im Widerspruch zur Minimalität von M. Daher ist $f(M) = 100$. Die Zahlen von M bis $M + 101$ erfüllen also die Bedingung.

Bemerkung: Manchmal wurde ohne Beweis vermutet, dass gewisse Zahlen m, z. B. $m = 2^N$, nicht neckisch sind. Dies ist aber nicht offensichtlich, da wirklich auszuschließen ist, dass es *irgendwelche* Zahlen $a, b \geq 2$ mit $m = a^b + b$ geben kann.

Aufgabe 3
Es sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit $|AB| \neq |AC|$. Die Mittelpunkte der Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ seien D beziehungsweise E. Die Umkreise der Dreiecke BCD und BCE mögen den Umkreis des Dreiecks ADE in P beziehungsweise Q schneiden, wobei $P \neq D$ und $Q \neq E$.
Man beweise, dass $|AP| = |AQ|$.

1. Lösung: Ohne Einschränkung sei $|AC| > |AB|$. Da D und E Mitten der Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ sind, ist nach Strahlensatz DE parallel zu BC. Im Falle $E = P$ oder $D = Q$ wäre $CEDB$ Sehnenviereck mit parallelen Seiten BC und DE, also gleichschenkliges Trapez mit $|BD| = |EC|$, somit $|AB| = |AC|$, was aber ausgeschlossen ist. Kann man zeigen, dass die (nicht ausgearteten) Dreiecke APC und BQA ähnlich sind, folgt die Behauptung, da wegen $\angle PQA = \angle PDA = 180^\circ - \angle BDP = \angle PCB = \angle PCA + \gamma = \angle BAQ + \angle AED = \angle DPQ + \angle APD = \angle APQ$ (unter Benutzung des Umfangswinkelsatzes) das Dreieck APQ gleichschenklig ist mit $|AP| = |AQ|$. — Beweis, dass Dreiecke APC und BQA ähnlich sind: Zunächst gilt mit Umfangswinkelsatz

$$\angle DQB = 360^\circ - \angle EQD - \angle BQE = \angle DAE + \angle ECB = \alpha + \gamma = 180^\circ - \beta = 180^\circ - \angle EDA = \angle APE, \quad (1)$$
$$\angle EPC = \angle DPC - \angle DPE = (180^\circ - \beta) - \alpha = \gamma = \angle AED = \angle AQD. \quad (2)$$

Hieraus folgt die Ähnlichkeit der Dreiecke APC und BQA:
1. Beweis: Es sei Q' der eindeutig bestimmte Punkt auf derselben Seite von AC wie P, so dass Dreieck $AQ'C$ ähnlich zu Dreieck BQA ist. Da D und E Mitten der Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ sind, sind auch die Teildreiecke $AQ'E$ und BQD sowie CEQ' und ADQ ähnlich. Damit liegt Q' wegen (1) und (2), also $\angle APE = \angle BQD = \angle AQ'E$ und $\angle EPC = \angle DQA = \angle EQ'C$, auf den Umkreisen von AEP und CEP, die sich in E und P schneiden. $Q' = E$ ist wegen $Q \neq D$ ausgeschlossen. Damit ist $Q' = P$, und die Dreiecke APC und BQA sind ähnlich.
2. Beweis: Mit Sinussatz in ADQ und BQD gilt $|AQ| : |AD| = \sin\angle QDA : \sin\angle AQD$, $|BQ| : |BD| = \sin\angle BDQ : \sin\angle DQB$. Mit $\angle BDQ = 180^\circ - \angle QDA$ folgt $|AQ| : |BQ| = \sin\angle DQB : \sin\angle AQD$. Analog ist $|CP| : |PA| = \sin\angle APE : \sin\angle EPC$. Wegen (1) und (2) sind APC und BQA ähnlich nach Merkmal sws.
2. Lösung (mit Inversion am Kreis): Man invertiere an einem Kreis mit Mittelpunkt A und Radius 1. Der Bildpunkt eines Punkts X sei mit X' bezeichnet. Da D und E die Mitten der Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ sind, sind B' und C' die Mitten der Seiten $\overline{AD'}$ und $\overline{AE'}$. Die Inversion bildet den Umkreis des Dreiecks ADE auf die Gerade $D'E'$ ab, damit sind $P' \neq D'$ und $Q' \neq E'$ die zweiten Schnittpunkte der Umkreise der Dreiecke $B'C'D'$ und $B'C'E'$ mit der Geraden $D'E'$. Da die Geraden $D'E'$ und $B'C'$ parallel sind, liegen die Umkreise der Dreiecke $B'C'D'$ und $B'C'E'$ symmetrisch zur Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{B'C'}$, insbesondere gehen die Punkte Q' bzw. B' bzw. P' in E' bzw. C' bzw. D' über. Damit ist $|P'C'| = |B'D'| = |AB'|$ (da B' Mitte von $\overline{AD'}$) sowie $|B'Q'| = |C'E'| = |AC'|$ (da C' Mitte von $\overline{AE'}$) und $\angle Q'B'D' = \angle P'C'E'$. Daraus folgt $\angle AB'Q' = 180^\circ - \angle Q'B'D' = 180^\circ - \angle P'C'E' = \angle AC'P'$. Damit sind die Dreiecke $AP'C'$ und $AQ'B'$ nach Kongruenzsatz sws kongruent. Somit ist $|AP'| = |AQ'|$ und $|AP| = 1/|AP'| = 1/|AQ'| = |AQ|$.

Lösungen zur 2. Auswahlklausur 2014/2015

Aufgabe 1
Man bestimme alle Paare (x, y) ganzer Zahlen, welche die Gleichung

$$\sqrt[3]{7x^2-13xy+7y^2}=|x-y|+1 \qquad (1)$$

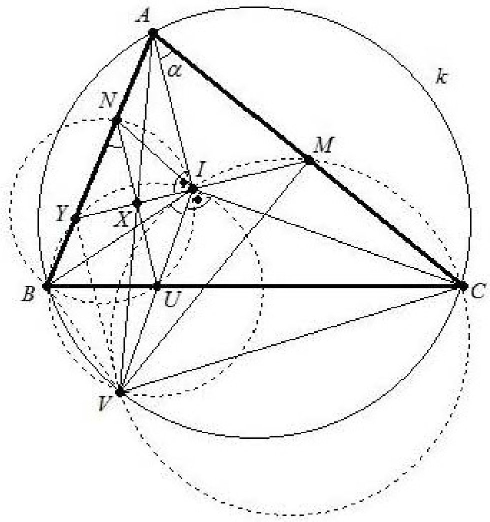
erfüllen.

Lösung: Die Gleichung (1) ist symmetrisch in x und y, so dass wir zunächst $x \ge y$ annehmen können und für $x \ne y$ zu jeder Lösung (x, y) auch (y, x) als Lösung erhalten. Mit $d = x-y \ge 0$ folgt $\sqrt[3]{7d^2+xy}=d+1$. Potenzieren liefert $x^2-dx+(-d^3+4d^2-3d-1)=0$ mit der Diskriminante $D=d^2-4(-d^3+4d^2-3d-1)=(d-2)^2(4d+1)\ge 0$. Es ist also $x_{1/2}=\dfrac{d\pm(d-2)\sqrt{4d+1}}{2}$. Für die Ganzzahligkeit von x muss $4d+1$ eine Quadratzahl sein, und zwar das Quadrat einer ungeraden Zahl. Der Ansatz $4d+1=(2m+1)^2$ mit $m\in\{0;1;2;\ldots\}$ liefert $d=m^2+m$, so dass sich $x_{1/2}=\frac{1}{2}[(m^2+m)\pm(m^2+m-2)(2m+1)]$ ergibt. Dies führt zu $(x_1, y_1)=(m^3+2m^2-m-1, m^3+m^2-2m-1)$ und für $m\ne 1$ zu $(x_2, y_2)=(-m^3-m^2+2m+1, -m^3-2m^2+m+1)$ und den Lösungen (y_1, x_1) bzw. (y_2, x_2) für $m>0$. Eine Probe bestätigt, dass diese Paare tatsächlich Lösungen sind.

Hinweis: Die einfachen Spezialfälle wurden von den meisten Teilnehmern gefunden. Häufig wurde dann (vergeblich) versucht, mit Abschätzungen zu zeigen, dass es keine weiteren Lösungen gibt.

Aufgabe 2
Es sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit dem Umkreis k und dem Inkreismittelpunkt I. Die Orthogonale zu CI durch I schneide die Seite BC in U und k in V, wobei V und A auf verschiedenen Seiten von BC liegen. Die Parallele zu AI durch U schneide AV im Punkt X.

Man beweise: Wenn die Geraden XI und AI orthogonal zueinander sind, dann schneidet XI die Seite AC in ihrem Mittelpunkt M.



Lösung: In der Figur ist M zunächst nur der Schnittpunkt von XI und AC. N ist der Schnittpunkt von XU und AB und Y der Schnittpunkt von XI und AB. Die <u>halben</u> Innenwinkel des Dreiecks ABC sind mit α, β bzw. γ bezeichnet. Wegen $\sphericalangle UIC = 90°$ ist $\sphericalangle CUI=\alpha+\beta$ und daher $\sphericalangle BNU=\sphericalangle BAI=\sphericalangle BIU=\alpha$, so dass die Punkte B, U, I und N auf einem Kreis liegen. Deshalb gilt $\overline{IU}=\overline{IN}$ (Sehnen zu β) und wegen $IX\perp NU$ folgt $\overline{NX}=\overline{XU}$. Anwendung der Strahlensätze führt auf $\dfrac{\overline{VX}}{\overline{VA}}=\dfrac{\overline{XU}}{\overline{AI}}=\dfrac{\overline{NX}}{\overline{AI}}=\dfrac{\overline{YX}}{\overline{YI}}$, woraus $YV \parallel AI$ folgt. Also ist auch $\sphericalangle BYV=\alpha=\sphericalangle BIV$, so dass die Punkte B, V, I und Y auf einem Kreis

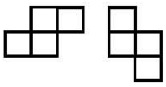
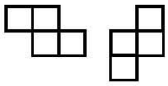
» Der Auswahlwettbewerb zur Internationalen Mathematik-Olympiade wird gefördert vom Bundesministerium für Bildung und Forschung. Träger ist Bildung & Begabung gemeinnützige GmbH.

liegen. Daher ist $\sphericalangle VBI = \sphericalangle VYI = 90°$. Da die Halbierenden von Innen- und Außenwinkel an einer Ecke im Dreieck stets orthogonal sind, ist BV die Halbierende des Außenwinkels bei B. Im Sehnenviereck $ABVC$ (Umkreis von ABC) erkennen wir daher $\sphericalangle VAC = \sphericalangle VBC = \alpha + \gamma$ und $\sphericalangle ACV = 180° - \sphericalangle VBA = 180° - (\alpha + 2\beta + \gamma) = \alpha + \gamma$, also $\sphericalangle VAC = \sphericalangle ACV$. Das Dreieck AVC ist somit gleichschenklig mit der Spitze V. Um nun zu zeigen, dass M der Mittelpunkt von AC ist, reicht der Nachweis von $\sphericalangle VMC = 90°$. Dazu verwenden wir in den Sehnenvierecken $BVIY$ und $ABVC$, dass $\sphericalangle VIM = 180° - \sphericalangle YIV = \sphericalangle VBY = \sphericalangle VBA = 180° - \sphericalangle ACV$ ist, so dass auch $VCMI$ ein Sehnenviereck ist. Dies liefert $\sphericalangle VMC = \sphericalangle VIC = 90°$.

Hinweis: Einige Teilnehmer haben eine Winkeljagd versucht, die jedoch ohne eine Jagd nach Sehnenvierecken erfolglos bleibt. Analytische Ansätze konnten nicht erfolgreich abgeschlossen werden.

Aufgabe 3

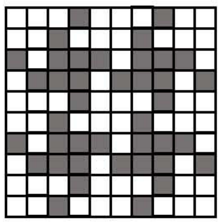
Aus zwei 2x1-Dominosteinen kann man ein *Tetromino* konstruieren, indem man die beiden Dominosteine längs ihrer längeren Seiten so aneinanderlegt, dass der Mittelpunkt der längeren Seite des einen Dominosteins ein Eckpunkt des anderen Dominosteins ist. Dabei ergeben sich zwei hinsichtlich ihrer Orientierung verschiedene Typen von Tetrominos, die wir als S- bzw. Z-Tetromino bezeichnen wollen.

S-Tetrominos:  Z-Tetrominos: 

Ein *Gitterpunktpolygon* P ist eine einfach zusammenhängende Fläche, deren Randlinien nur auf Gitterlinien des ebenen ganzzahligen Koordinatengitters liegen. Eine *Pflasterung* von P ist eine vollständige und überlappungsfreie Überdeckung von P mit Flächenstücken, die auch nicht teilweise außerhalb von P liegen.

Wir nehmen nun an, dass ein Gitterpunktpolygon P nur mit S-Tetrominos gepflastert werden kann. Man beweise: Wenn auch eine Pflasterung von P mit S- und Z-Tetrominos möglich ist, dann ist die Anzahl der dabei verwendeten Z-Tetrominos stets gerade.

Lösung: Wir können annehmen, dass P aus einem Teil der Einheitsquadrate des ganzzahligen Koordinatengitters besteht, die wie abgebildet eingefärbt sind. Unter dieser Färbung bedeckt jedes S-Tetromino eine gerade Anzahl schwarzer Quadrate und jedes Z-Tetromino eine ungerade Anzahl von diesen. Da P vollständig mit S-Tetrominos gepflastert werden kann, enthält es eine gerade Anzahl schwarzer Quadrate. Wenn also eine Pflasterung mit S- und Z-Tetrominos möglich ist, erfordert diese gerade Anzahl auch eine gerade Anzahl von Z-Tetrominos.



Hinweis: Es gibt weitere Färbungsansätze, z.B. mit zwei Färbungen. Das Argument, P müsse vollständig in achsensymmetrische Teile zerlegbar sein, in denen dann zwei S-Tetrominos durch zwei Z-Tetrominos ersetzt werden können, ist wie alle Ansätze, die auf lokalen Eigenschaften von P beruhen, nicht zwingend und deckt nur Spezialfälle ab.