# Lösungen zur 1. Auswahlklausur 2013/2014

**Aufgabe 1.** *Die Zentralbank von Sikinien prägt Münzen im Wert von 11 und 12 Kulotnik. Bei einem Einbruch haben 11 sikinische Ganoven einen Tresor geknackt und Münzen im Gesamtwert von 5940 Kulotnik erbeutet. Sie versuchen für eine Weile, die Beute gerecht unter sich aufzuteilen – also so, dass jeder gleich viel erhält – aber es will ihnen nicht gelingen; nach einer Weile behauptet ihr Anführer, sich überlegt zu haben, dass dies tatsächlich nicht möglich ist.*

*Man beweise, dass sie keine Münze im Wert von 12 Kulotnik erbeutet haben.*

**Lösung.** Die Ganoven mögen $a$ Münzen im Wert von 11 Kulotnik und $b$ Münzen im Wert von 12 Kulotnik erbeutet haben. Dabei sind $a$ und $b$ zwei nichtnegative ganze Zahlen mit

$$11a + 12b = 5940 = 11 \cdot 540 = 12 \cdot 495. \tag{1}$$

Wir nehmen nun $b > 0$ an und versuchen, eine gerechte Aufteilung der Beute auf die Ganoven zu finden.
Nach (1) ist $11a = 12 \cdot (495 - b)$, d.h. $11a$ ist durch 12 teilbar. Nachdem 11 und 12 teilerfremd sind, ist folglich auch $a$ ein Vielfaches von 12 und demnach können die Ganoven die erbeuteten 11–Kulotnik–Stücke in $\frac{a}{12}$ Säckchen verteilen, von denen jedes $12 \cdot 11 = 132$ Kulotnik enthält.
Analog impliziert (1) die Gleichung $12b = 11 \cdot (540 - a)$ und mithin ist $12b$ durch 11 teilbar. Wie vorhin zeigt dies, dass auch $b$ durch 11 teilbar ist. Da wir $b > 0$ angenommen haben, kann sich jeder der Ganoven eine Münze im Wert von 12 Kulotnik nehmen, und die Anzahl $b - 11$ der übrigen 12–Kulotnik–Stücke ist immer noch durch 11 teilbar, weshalb sich diese in $\frac{b}{11} - 1$ Säckchen aufteilen lassen, die ebenfalls je $11 \cdot 12 = 132$ Kulotnik enthalten.
Wegen

$$5940 - 11 \cdot 12 = 5808 = 132 \cdot 44$$

befindet sich der noch nicht verteilte Rest der Beute nunmehr in $44 = 11 \cdot 4$ Säckchen zu je 132 Kulotnik. Wenn sich nun jeder der 11 Ganoven 4 dieser Säckchen nimmt haben sie insgesamt die Beute gerecht geteilt. Doch da ihr Anführer beweisen konnte, dass dies gar nicht möglich ist, muss unsere Annahme $b > 0$ falsch gewesen sein: Anders ausgedrückt lag tatsächlich keine Münze im Wert von 12 Kulotnik im Tresor. □

**Bemerkung.** Manche Teilnehmer ersannen für die Ganoven äußerst findige Spitznamen: Bankräuber, Piraten, Gangster, Banditen, Gauner, Kriminelle, Straftäter, Diebe.

**Aufgabe 2.** *Es sei $ABCD$ ein konvexes Sehnenviereck mit $|AD| = |BD|$. Seine Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ mögen sich in $E$ schneiden. Der Mittelpunkt des Inkreises des Dreiecks $BCE$ heiße $I$. Der Umkreis des Dreiecks $BIE$ schneide das Innere der Strecke $\overline{AE}$ im Punkt $N$.*

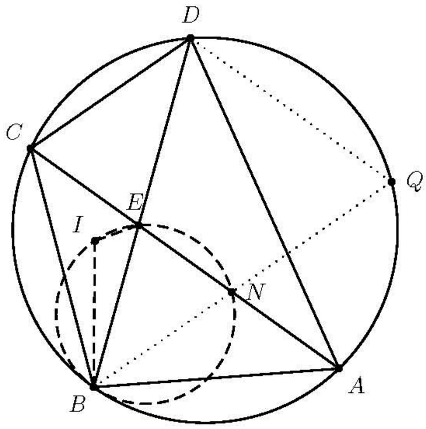
*Man beweise, dass*

$$|AN| \cdot |NC| = |CD| \cdot |BN|.$$

**Lösung.** Setzt man $\varphi = \sphericalangle DAB$, so muss auch $\sphericalangle ABD = \varphi$ sein, denn das Dreieck $ABD$ wurde als gleichschenklig vorausgesetzt. Hieraus ergibt sich $\sphericalangle BDA = 180° - 2\varphi$ und mit Hilfe des Peripheriewinkelsatzes folgt $\sphericalangle BCE = \sphericalangle BCA = 180° - 2\varphi$.

GEFÖRDERT VOM
Bundesministerium für Bildung und Forschung
Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft

Die Geschäftsstelle der Bundesweiten Mathematik-Wettbewerbe wird gefördert vom Bundesministerium für Bildung und Forschung.
Sie wird bei Bildung & Begabung gemeinnützige GmbH geführt.
www.bildung-und-begabung.de | Eingetragen beim Registergericht Amtsgericht Essen HRB 22445 | St.-Nr. 206/5887/1089
Geschäftsführung: PD Dr. Elke Völmicke, Heinz Rüdiger Grunewald




Als nächstes wollen wir den Winkel $BIE$ durch $\varphi$ ausdrücken: Da die Geraden $BI$ und $EI$ Winkelhalbierende im Dreieck $BCE$ sind, ist

$$\sphericalangle BIE = 180^\circ - (\sphericalangle IEB + \sphericalangle EBI) = 90^\circ + \tfrac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle CEB + \sphericalangle EBC) = 90^\circ + \tfrac{1}{2}\sphericalangle BCE,$$

was mit vorigem verbunden

$$\sphericalangle BIE = 90^\circ + \tfrac{1}{2}(180^\circ - 2\varphi) = 180^\circ - \varphi$$

liefert.

Nachdem $BIEN$ ein konvexes Sehnenviereck ist, impliziert dies $\sphericalangle CNB = \varphi$. Da nach Peripheriewinkelsatz über der Sehne $\overline{AD}$ auch $\sphericalangle ACD = \varphi$ gilt, muss demnach $CD \parallel BN$ sein.

Man verlängere nun die Strecke $\overline{BN}$ über $N$ hinaus, bis sie den Umkreis des Vierecks $ABCD$ erneut in $Q$ schneidet. Indem wir den Peripheriewinkelsatz über der Sehne $\overline{BD}$ anwenden, erhalten wir $\sphericalangle DQB = \varphi$, was wiederum $CN \parallel QD$ nach sich zieht.

Da die beiden Paare gegenüberliegender Seiten des Vierecks $CNQD$ also jeweils parallel sind, muss es sich bei diesem um ein Parallelogramm handeln. Mithin ist $|CD| = |NQ|$ und sobald man dies in die aus dem Sehnensatz folgende Gleichung

$$|AN| \cdot |NC| = |BN| \cdot |NQ|$$

einträgt hat man die Behauptung bewiesen. □

**Bemerkung.** Man kann beweisen, dass sich in der Figur die beiden Kreise berühren.

**Aufgabe 3.** *Es sei $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots$ eine monoton steigende Folge positiver ganzer Zahlen. Eine positive ganze Zahl $n$ heißt verlässlich, wenn es einen positiven ganzzahligen Index $i$ mit $n = \frac{i}{a_i}$ gibt.*

*Man beweise: Wenn 2013 verlässlich ist, dann ist auch 20 verlässlich.*

**Lösung.** Wenn 2013 verlässlich ist, gibt es einen positiven ganzzahligen Index $i$ mit $i = 2013a_i \geqslant 20a_i$. Insbesondere ist die Menge $S$ aller positiven ganzen Zahlen $s$, für die $s \geqslant 20a_s$ gilt, nicht leer. Somit enthält $S$ ein kleinstes Element $j$, und dieses erfüllt einerseits

$$j \geqslant 20a_j \tag{2}$$

und andererseits $(j-1) \notin S$. Letzteres bedeutet, dass entweder $j = 1$ sein muss, oder $j > 1$ und $j - 1 < 20a_{j-1}$. Wegen $a_j \geqslant 1$ folgt aus (2) jedoch $j \geqslant 20$, was die erste dieser beiden Alternativen ausschließt; demnach muss $j \leqslant 20a_{j-1}$ sein und in Verbindung mit (2) erhalten wir die Ungleichungskette

$$j \geqslant 20a_j \geqslant 20a_{j-1} \geqslant j.$$

Diese kann nicht anders bestehen als dass überall Gleichheit gilt. Wegen $j = 20a_j$ bezeugt der Index $j$, dass 20 wie behauptet verlässlich ist. □

**Bemerkung.** Es ändert sich nichts, wenn man in der Aufgabenstellung die Zahlen 2013 und 20 durch zwei beliebige positive ganze Zahlen $r$ und $s$ mit $r > s$ ersetzt.

# Lösungen zur 2. Auswahlklausur 2013/2014

**Aufgabe 1**
Eine natürliche Zahl $n$ habe die folgende Eigenschaft:
Für beliebige reelle Zahlen $a_1, a_2, ..., a_d$, die sowohl $a_1 + a_2 + ... + a_d = 2013$ als auch $0 \le a_i \le 1$ für $i = 1, 2, ..., d$ erfüllen, existiert eine Zerlegung der Menge dieser reeller Zahlen in $n$ paarweise disjunkte Teilmengen (von denen einige leer sein dürfen), so dass die Summe der Zahlen in jeder Teilmenge höchstens 1 beträgt.
Man bestimme die kleinste Zahl $n$ mit dieser Eigenschaft.

**Lösung:** Die kleinste Zahl $n$ mit dieser Eigenschaft ist 4025.
Wir zeigen zunächst $n \ge 4025$. Dazu wählen wir $d = 4025$ sowie $a_1 = ... = a_{4025} = \frac{2013}{4025} > \frac{1}{2}$.
Dann ist $a_1 + ... + a_{4025} = 2013$ und wegen $a_i + a_j = \frac{4026}{4025} > 1$ für alle $1 \le i \ne j \le 4025$ werden hier 4025 Teilmengen benötigt.
Nun zeigen wir $n \le 4025$. Dazu führen wir eine Fallunterscheidung nach $d$ durch.
Für $d \le 4025$ erhält jedes $a_i$ seine eigene Teilmenge. Damit sind alle Teilmengen, von denen einige leer sein dürfen, disjunkt und haben Elementsummen von höchstens 1.
Für $d > 4025$ müssen zwei Zahlen $a_x$ und $a_y$ existieren mit $a_x + a_y \le 1$. Andernfalls wäre schon in der Summe $(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + ... + (a_{4025} + a_{4026})$ jede Klammer größer als 1 und die Summe aller $a_i$ größer als 2013, Widerspruch! Somit können wir $a_x$ und $a_y$ durch $a_z = a_x + a_y$ ersetzen und erhalten eine Menge mit $d-1$ Elementen, die alle Bedingungen erfüllt. Dieser Schritt kann wiederholt werden, bis die Ersetzung eine Menge mit 4025 Elementen liefert. Für diese und damit auch für die Ausgangsmenge existiert die gewünschte Aufteilung. Damit ist alles gezeigt.

**Hinweis:** Einige der $a_i$ dürfen durchaus gleich sein; zwei Teilmengen sind dann disjunkt, wenn sie nicht dasselbe Element (bezogen auf die Nummerierung) enthalten. Die Aufgabenstellung ließ viele Lösungswege zu.

**Aufgabe 2**
Es sei $\mathbb{Z}^+$ die Menge der positiven ganzen Zahlen.
Man bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ mit der Eigenschaft, dass für alle positiven ganzen Zahlen $m$ und $n$ gilt: $m^2 + f(n) | mf(m) + n$.

**Lösung:** Für eine beliebige positive ganze Zahl $n$ wählen wir $m$ so, dass $f(n) | m$ gilt. Dann folgt $f(n) | m^2 + f(n)$ und $f(n) | mf(m) + n$. Weil $m$ durch $f(n)$ teilbar ist, muss auch $n$ durch $f(n)$ teilbar sein. Es gilt also $f(n) | n$, das bedeutet $f(n) \le n$ für alle $n \in \mathbb{Z}^+$.
Daraus folgt insbesondere $f(1) | 1$, also $f(1) = 1$.
Wir nehmen weiter an, es gäbe ein $m \in \mathbb{Z}^+$ mit $f(m) < m$. Mit $n = 1$ erhalten wir $m^2 + 1 | mf(m) + 1$, andererseits gilt dann $0 < mf(m) + 1 < m^2 + 1$, so dass $m^2 + 1$ kein Teiler von $mf(m) + 1$ sein kann – Widerspruch! Also gilt $f(m) \ge m$ und mit dem oberen folgt $f(n) = n$ für alle $n \in \mathbb{Z}^+$. Einsetzen bestätigt über $n^2 + n = n^2 + f(n) | nf(n) + n = n^2 + n$, dass diese Funktion tatsächlich die – daher – einzige Lösung ist.

**Hinweis:** Eine häufige Fehlerquelle war die Annahme spezieller Voraussetzungen (z.B. $m$ prim oder $n > 2$ usw.), die im späteren Beweisgang zugunsten von $m, n \in \mathbb{Z}^+$ „vergessen" wurden.

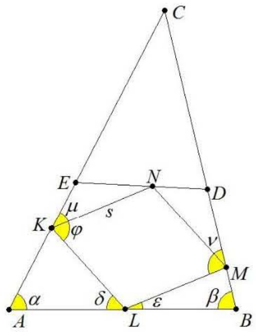
GEFÖRDERT VOM
Bundesministerium für Bildung und Forschung

Die Geschäftsstelle der Bundesweiten Mathematik-Wettbewerbe wird gefördert vom Bundesministerium für Bildung und Forschung.
Sie wird bei Bildung & Begabung gemeinnützige GmbH geführt.
www.bildung-und-begabung.de | Eingetragen beim Registergericht Amtsgericht Essen HRB 22445 | St.-Nr. 206/5887/1089
Geschäftsführung: PD Dr. Elke Völmicke, Heinz Rüdiger Grunewald

Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft

**Aufgabe 3**
In einem spitzwinkligen Dreieck $ABC$ seien die Innenwinkel $\alpha, \beta, \gamma$ wie üblich bezeichnet.
Ferner seien der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von $\alpha$ und $BC$ mit $D$ sowie der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von $\beta$ und $AC$ mit $E$ bezeichnet.
Nun wird dem Viereck $ABDE$ eine Raute so einbeschrieben, dass alle Eckpunkte dieser Raute auf verschiedenen Seiten des Vierecks liegen. In dieser Raute seien die nicht-stumpfen Innenwinkel mit $\varphi$ bezeichnet. Man beweise, dass $\varphi \le \max(\alpha, \beta)$ gilt.

**Lösung:** Die Ecken der Raute werden mit $K$ ($K \in AE$), $L$ ($L \in AB$), $M$ ($M \in BD$) und $N$ ($N \in DE$) benannt. Mit $d(X, YZ)$ sei der Abstand eines Punktes $X$ von einer Geraden $YZ$ bezeichnet. Weil $D$ und $E$ auf den jeweiligen Winkelhalbierenden liegen, gilt $d(D, AB) = d(D, AC)$, $d(E, AB) = d(E, BC)$ und $d(D, BC) = d(E, AC) = 0$, woraus $d(D, AC) + d(D, BC) = d(D, AB)$ und $d(E, AC) + d(E, BC) = d(E, AB)$ folgt.




Weil $N$ auf der Strecke $DE$ liegt und weil sich in der Gleichung $d(X, AC) + d(X, BC) = d(X, AB)$, wenn $X$ längs der Strecke $DE$ wandert, alle Terme nur linear ändern, folgt aus den beiden oberen Beziehungen auch für $N$:
$d(N, AC) + d(N, BC) = d(N, AB)$ (1).
Mit den Bezeichnungen der Figur gilt $d(N, AC) = s \cdot \sin\mu$ und $d(N, BC) = s \cdot \sin\nu$. Weil die Raute $KLMN$ ganz in einer der Halbebenen bezüglich $AB$ liegt, erhalten wir aus ihrer Parallelogrammeigenschaft
$d(N, AB) = d(N, AB) + d(L, AB) = d(K, AB) + d(M, AB) = s(\sin\delta + \sin\varepsilon)$.
Mit (1) folgt $\sin\mu + \sin\nu = \sin\delta + \sin\varepsilon$ (2).
Aus der Annahme $\varphi > \max(\alpha, \beta)$ würde wegen $\mu + \varphi = \sphericalangle CKL = \alpha + \delta$ direkt $\mu = \alpha - \varphi + \delta < \delta$ und analog $\nu < \varepsilon$ folgen. Wegen $KL \parallel MN$ gilt $\beta = \delta + \nu$, also $\delta < \beta < 90°$. Entsprechend folgt $\varepsilon < 90°$. So erhalten wir $\sin\mu < \sin\delta$ und $\sin\nu < \sin\varepsilon$, im Widerspruch zu (2). Also gilt $\varphi \le \max(\alpha, \beta)$.

**Hinweis:** Eine reine Winkeljagd führt nicht zum Ziel. Die Lage der Raute ist – entgegen der Meinung einiger Teilnehmer – nicht eindeutig bestimmt. Gleichheit gilt nur für $\alpha = \beta$.