Lösungen zur 1. Auswahlklausur 2012/2013

1. Aufgabe. Es sei n eine ungerade natürliche Zahl und x und y seien zwei rationale Zahlen mit

$$x^n + 2y = y^n + 2x.$$

Man zeige, dass $x = y$.

Lösung. Wir überlegen uns zuerst

($\boxtimes$) *Es sei $n \geqslant 3$ eine ungerade natürliche Zahl. Weiterhin seien a, b und c drei ganze Zahlen mit*

$$a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1} = 2c^{n-1}.$$

Sodann ist $a = b = c = 0$.

Wenn dies bei einem gewissen n falsch wäre, könnten wir zu diesem ein Gegenbeispiel (a, b, c) wählen, bei dem der Ausdruck $|a| + |b| + |c|$ seinen kleinstmöglichen positiven Wert annimmt. Wären a und b beide ungerade, so wäre die linke Seite die Summe einer ungeraden Anzahl ungerader Summanden und mithin selbst ungerade, während die rechte Seite gerade ist. Also ist mindestens eine der beiden Zahlen a und b gerade. Ist etwa a gerade, so hat die linke Seite dieselbe Parität wie b^{n-1} und die rechte Seite ist gerade, sodass b ebenfalls gerade ist. Ebenso sieht man, dass a gerade sein muss, falls b als gerade vorausgesetzt wird. Insgesamt sind also a und b beide gerade. Folglich ist die linke Seite durch 2^{n-1} und damit insbesondere durch 4 teilbar, womit sich c^{n-1} und demnach auch c als gerade erwiesen hat. Führt man nun drei ganze Zahlen a', b' und c' mit $a = 2a'$, $b = 2b'$ und $c = 2c'$ in die Betrachtung ein, so ist erstens

$$a'^{n-1} + a'^{n-2}b' + \ldots + b'^{n-1} = 2c'^{n-1}$$

und zweitens

$$0 < |a'| + |b'| + |c'| < |a| + |b| + |c|.$$

Das Tripel (a', b', c') widerspricht also der Wahl von (a, b, c) und damit ist ($\boxtimes$) bewiesen.

Wir wenden und nunmehr der eigentlichen Aufgabe zu. Im Fall $n = 1$ ist die Behauptung trivial und wir konzentrieren uns von jetzt an nur noch auf den Fall $n \geqslant 3$. Es seien x und y zwei rationale Zahlen mit $x^n + 2x = y^n + 2y$. Indem wir alles auf eine Seite bringen und anschließend faktorisieren, erhalten wir

$$(x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + y^{n-1} - 2) = 0.$$

Wenn x und y also verschieden wären, was wir von jetzt an annehmen wollen, müsste

$$x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + y^{n-1} = 2 \tag{1}$$

GEFÖRDERT VOM
Bundesministerium für Bildung und Forschung
Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft

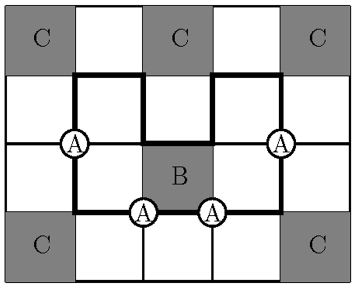
Die Geschäftsstelle der Bundesweiten Mathematik-Wettbewerbe wird gefördert vom Bundesministerium für Bildung und Forschung.
Sie wird bei Bildung & Begabung gemeinnützige GmbH geführt.
www.bildung-und-begabung.de | Eingetragen beim Registergericht Amtsgericht Essen HRB 22445 | St.-Nr. 206/5887/1089
Geschäftsführung: PD Dr. Elke Völmicke, Heinz Rüdiger Grunewald

sein. Da man je zwei rationale Zahlen auf einen gemeinsamen Nenner bringen kann, gibt es drei ganze Zahlen a, b und c mit $c \neq 0$, $x = a/c$ und $y = b/c$. Wer diese Brüche in (1) einsetzt und daraufhin mit c^{n-1} multipliziert, erhält

$$a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1} = 2c^{n-1}.$$

Aus $(\boxtimes)$ folgt nun allerdings insbesondere $c = 0$. Dieser Widerspruch zeigt, dass x und y doch gleich sein müssen, womit die Aufgabe gelöst ist. $\square$

2. Aufgabe. Es seien $m, n \geqslant 4$ zwei ganze Zahlen. Wir betrachten ein $m \times n$–Gitterrechteck, das von $m+1$ horizontalen und $n+1$ vertikalen Strecken gebildet wird. Die Schnittpunkte dieser Strecken heißen *Ecken*. Es sei P ein von Selbstüberschneidungen freier, geschlossener Weg, der durch jede der $(m-1)(n-1)$ inneren Ecken aber keine der äußeren Ecken geht. Es bezeichne A die Anzahl der inneren Ecken, durch die P geradlinig hindurchgeht, B die Anzahl der Gitterquadrate, von denen P genau zwei Seiten benutzt, die sich zudem gegenüber liegen, und C die Anzahl der Gitterquadrate, von denen P keine Seite benutzt. Man beweise, dass $A = B - C + m + n - 1$.



(Die Abbildung zeigt eine Situation mit $m = 4$, $n = 5$, $A = 4$, $B = 1$ und $C = 5$.)

Lösung. Es sei D die Anzahl der Gitterquadrate, von denen genau eine Seite zu P gehört, E die Anzahl der Gitterquadrate, von denen genau zwei Seiten zu P gehören, die zudem benachbart sind, und schließlich F die Anzahl der Gitterquadrate von denen genau drei Seiten zu P gehören. Wegen $m, n \geqslant 4$ ist unter den mn Gitterquadraten keines, dessen gesamter Rand in P enthalten ist und folglich gibt es für den Schnitt eines solchen Randes mit P nur die fünf Möglichkeiten, die in den Definitionen von B, C, D, E und F angesprochen sind. Wir haben also

$$mn = B + C + D + E + F. \tag{2}$$

Nun wollen wir die Paare (Q, S), die aus einem Gitterquadrat Q und einer P angehörigen Seite S von Q bestehen, auf zwei Arten abzählen. Einerseits gibt es zu den Quadraten vom Typ B, C, D, E und F jeweils genau 2, 0, 1, 2 und 3 mögliche Wahlen für S und daher beträgt diese Anzahl $2B + D + 2E + 3F$. Andererseits ist P aus $(m-1)(n-1)$ Einheitsstrecken zusammengesetzt, die alle als S fungieren können und jede derselben hat zwei Seiten auf auf denen jeweils ein Gitterquadrat liegt. Insgesamt erhalten wir also

$$2(m-1)(n-1) = 2B + D + 2E + 3F. \tag{3}$$

Bei jeder der $(m-1)(n-1)$ inneren Ecken unseres Rechtecks geht P entweder geradeaus hindurch, und dies passiert genau A mal, oder P knickt ab. Wann immer dies geschieht, schließen die beiden zugehörigen Einheitsteilstrecken von P ein Gitterquadrat ein und dieses muss entweder von Typ E oder vom Typ F sein. Umgekehrt gehören zu jedem Quadrat vom Typ E ein und zu jedem Quadrat vom Typ F zwei dieser Abknickpunkte von P. Alles in allem gilt also auch

$$(m-1)(n-1) = A + E + 2F. \tag{4}$$

Aus (2) − (3) + (4) erhalten wir nunmehr

$$m + n - 1 = A - B - C$$

und dies wiederum impliziert

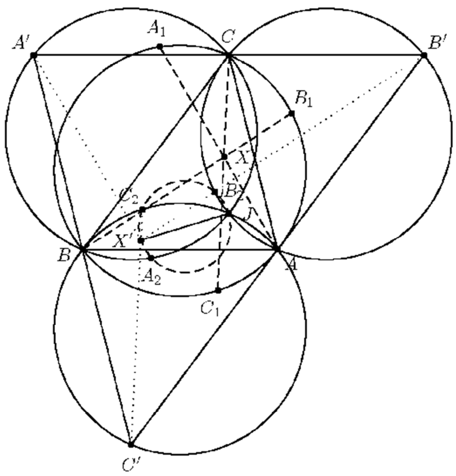
$$A = B - C + m - n - 1.$$

Damit ist die Aufgabe gelöst. $\square$

3. Aufgabe

Es sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit Umkreis ω. Man beweise, dass es einen Punkt J mit der folgenden Eigenschaft gibt: Ist X ein innerer Punkt von ABC, treffen die Strahlen AX, BX und CX den Kreis ω erneut in den Punkten A_1, B_1 und C_1 und liegen die Punkte A_2, B_2 und C_2 symmetrisch zu A_1, B_1 und C_1 bezüglich der Mittelpunkte der Strecken $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ beziehungsweise $\overline{AB}$, so liegen die vier Punkte A_2, B_2, C_2 und J auf einem gemeinsamen Kreis.

Lösung. Wir zeigen, dass der normalerweise H genannte Höhenschnittpunkt J des Dreiecks ABC die beschriebene Eigenschaft aufweist. Hierzu sei a die durch A gezogene Parallele zu BC und die Geraden b und c seien analog definiert. Keine zwei der drei Geraden a, b und c sind parallel und folglich existieren der Schnittpunkt A' von b mit c sowie die beiden analog definierten Punkte B' und C'.



Das Viereck $A'CJB$ besitzt bei B und C rechte Winkel und ist daher ein Sehnenviereck. Da die Spiegelung am Mittelpunkt der Strecke $\overline{BC}$ den Punkt A auf A' abbildet und B mit C vertauscht, führt sie ω in den Umkreis des gerade gefundenen Sehnenvierecks über. Demnach liegt A_2 auf diesem Kreis und $A'A_2$ ist zu AX parallel.

Der Schwerpunkt des Dreiecks ABC heiße S. Die zentrische Streckung σ mit Zentrum S und Faktor -2 bildet A auf A' ab; der Bildpunkt von X heiße X'. Sodann sind die beiden Geraden AX und $A'X'$ parallel und daher liegt X' auf der Geraden $A'A_2$. Ähnliche Argumente lassen sich auch mit B und C an der Stelle von A ausführen und wir lernen insgesamt: Die drei Geraden $A'A_2$, $B'B_2$ und $C'C_2$ schneiden sich in X'.

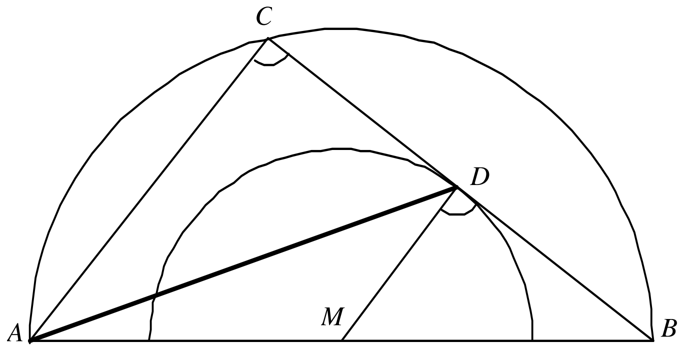
Falls $X' = J$ fallen auch die Punkte A_2, B_2 und C_2 mit J zusammen und die Behauptung ist trivial. Von nun ab sei daher $X' \neq J$.

Wegen $\sphericalangle A'CJ = 90^\circ$ ist die Strecke $\overline{A'J}$ nach Satz des THALES ein Durchmesser des Umkreises des Vierecks $A'CJB$. Wieder um nach Satz des THALES ist daher $\sphericalangle JA_2A' = 90^\circ$ und folglich auch $\sphericalangle JA_2X' = 90^\circ$. Der Punkt A_2 liegt demnach, abermals nach Satz des THALES, auf dem Kreis mit Durchmesser JX'. Aus analogen Gründen liegen auch die beiden Punkte B_2 und C_2 auf diesem Kreis und insbesondere haben wir nunmehr einen Kreis gefunden, auf dem alle vier der Punkte A_2, B_2, C_2 und J liegen. $\square$

Aufgabe 1

In der Ebene liegen zwei konzentrische Kreise mit den Radien $r_1 = 13$ und $r_2 = 8$.
Es sei *AB* ein Durchmesser des größeren Kreises und *BC* eine seiner Sehnen, die den kleineren Kreis im Punkt *D* berührt.
Man berechne die Länge der Strecke *AD*.

Lösung: Die beiden möglichen Lagen von *D* sind symmetrisch zur Geraden (*AB*), so dass es ausreicht, den Fall zu betrachten, bei dem das Dreieck *ABD* gegen den Uhrzeigersinn orientiert ist (siehe Figur). Der gemeinsame Mittelpunkt der beiden Kreise sei mit *M* bezeichnet. Weil der Berührradius *MD* auf der Tangente *BC* senkrecht steht, ist *MBD* rechtwinklig, so dass aus dem Satz des Pythagoras



$|BD|^2 = |MB|^2 - |MD|^2 = r_1^2 - r_2^2 = 169 - 64 = 105$ folgt.
Nach dem Satz des Thales ist $\sphericalangle ACB = 90°$. Da wegen $\sphericalangle ACB = \sphericalangle MDB = 90°$ und des gemeinsamen Winkels $\sphericalangle DBM = \sphericalangle CBA$ die Dreiecke *ABC* und *MBD* ähnlich sind, und da $|MB| = r_1 = |MA|$ gilt, ist auch $|DC| = |BD| = \sqrt{105}$ sowie $|CA| = 2 \cdot |DM| = 16$. Damit sind die Längen der Katheten im rechtwinkligen Dreieck *ADC* bekannt und es folgt $|AD| = \sqrt{105 + 16^2} = \sqrt{361} = 19$. Die Seite *AD* hat also die Länge 19.

Hinweise: Zahlreiche andere Lösungswege sind möglich. Weil die Aufgabe recht einfach ist, mussten auch für Fehler im letzten Rechenschritt (Beispiele: $\sqrt{360}$, $\sqrt{461}$ oder sogar $\sqrt{361} \approx 18,5$) Punkte abgezogen werden.

Aufgabe 2

Eine Menge *A* von ganzen Zahlen heißt *zulässig*, wenn sie folgende Eigenschaft hat:

Für $x, y \in A$ ($x = y$ ist erlaubt) gilt $x^2 + kxy + y^2 \in A$ für jede ganze Zahl *k*.

Man bestimme alle Paare m, n von Null verschiedener ganzer Zahlen, für welche die einzige zulässige Menge, die sowohl *m* als auch *n* enthält, die Menge $\mathbb{Z}$ aller ganzer Zahlen ist.

Lösung: Für ein Paar m, n mit $\text{ggT}(|m|,|n|) = d > 1$ ist $m^2 + kmn + n^2$ durch *d* teilbar, so dass als Menge *A* auch die Menge aller ganzzahligen Vielfachen von *d* in Frage kommt, die das Element 1 nicht enthält und daher von $\mathbb{Z}$ verschieden ist.
Nun betrachten wir Zahlen m, n mit $\text{ggT}(|m|,|n|) = 1$. Für diese gilt auch $\text{ggT}(m^2, n^2) = 1$. Daher folgt aus dem erweiterten Euklidischen Algorithmus oder aus dem kleinen Satz von Fermat, dass es ganze Zahlen *r* und *s* gibt mit $rm^2 + sn^2 = 1$. Außerdem ist für $x = y = m$ ersichtlich, dass $(2+k)m^2 \in A$, d.h. jedes ganzzahlige Vielfache von m^2 in *A* liegt – entsprechend liegt jedes ganzzahlige Vielfache von n^2 in *A*. Und für $k = 2$ ergibt sich, dass für alle $x, y \in A$ auch $(x+y)^2$ in *A* liegt. Also liegen rm^2, sn^2 und folglich $(rm^2 + sn^2)^2 = 1^2 = 1$ in *A*.

Aufgabe 3

Es sei n eine positive natürliche Zahl. Im Folgenden betrachten wir Paare von Elementen der Menge $\{1, 2, ..., n\}$, die jeweils kein gemeinsames Element haben.

Man bestimme mit Beweis die größtmögliche Anzahl solcher Paare, für welche die Summen ihrer Elemente paarweise verschieden und nicht größer als n sind.
(Zum Beispiel sind $(1;9)$, $(2;7)$ und $(3;5)$ für $n = 10$ drei mögliche Paare.)

Lösung: Es sei k die Anzahl möglicher Paare. Dann lässt sich die Summe S der in ihnen vorkommenden $2k$ Zahlen in zwei Richtungen abschätzen:
$S \geq 1 + 2 + ... + 2k = k(2k+1)$ (alle Zahlen sind verschieden) und
$S \leq n + (n-1) + ... + (n-k+1) = nk - \frac{1}{2}k(k-1)$ (alle Summen sind verschieden und $\leq n$).
Dies liefert für $n \geq 3$ wegen $k > 0$ nach Division durch k die Ungleichung $2k + 1 \leq n - \frac{1}{2}(k-1)$, aus der $k \leq \frac{2n-1}{5}$ folgt. Es gibt also höchstens $\left\lfloor \frac{2n-1}{5} \right\rfloor$ mögliche Paare
($\lfloor x \rfloor$ bezeichnet die größte ganze Zahl $\leq x$). Für $n < 3$ ist offensichtlich $k = 0$.
Nun geben wir für $n \geq 3$ eine Konstruktion mit genau $\left\lfloor \frac{2n-1}{5} \right\rfloor$ Paaren an. Dazu sei zunächst $n = 5m + 3$, also $k = 2m + 1$. Die folgende Tabelle zeigt die Paare und ihre Summen, wobei für kleine m manche Spalten wegen Doppeldeutigkeit der Terme gestrichen werden müssen:

Paar	$3m+1$ 2	$3m$ 4	… …	$2m+2$ $2m$	$4m+2$ 1	$4m+1$ 3	… …	$3m+3$ $2m-1$	$3m+2$ $2m+1$
Summe	$3m+3$	$3m+4$	…	$4m+2$	$4m+3$	$4m+4$	…	$5m+2$	$5m+3$

Die $2m+1$ Paare enthalten alle Zahlen von 1 bis $4m+2$; ihre Summen gehen von $3m+3$ bis $5m+3$ und sind offensichtlich verschieden und nicht größer als n.
Dieselbe Konstruktion funktioniert auch für $n = 5m+4$ und $n = 5m+5$ $(m \geq 0)$, weil hier wieder $k = 2m+1$ ist. Für $n = 5m+2$ ist $k = 2m$ ausreichend. Daher kann hier die letzte Spalte der Tabelle einfach weggelassen werden. Für $n = 5m+1$ ist ebenfalls $k = 2m$ und wir lassen wieder die letzte Spalte der Tabelle weg und vermindern außerdem jede obere Zahl in der ersten Reihe um 1. So sind wiederum alle Bedingungen erfüllt.

Hinweis: Viele Teilnehmer haben sich von dem Beispiel verleiten lassen, $k = \lfloor n/3 \rfloor$ als maximale Anzahl anzunehmen. Wer allerdings für $n = 8$ die drei(!) Paare (2;4), (1;6), (3;5) oder (1;5), (3;4), (2;6) entdeckt hatte, war gegen diese Abschätzung immun. Das selten aufgetretene Missverständnis der Formulierung „jeweils kein gemeinsames Element“ in dem Sinne, dass Paare (*x*;*x*) erlaubt seien, führt auf ein triviales Problem, dessen Lösung nur mit einer bescheidenen Punktzahl honoriert worden ist.