Lösungen zur 2. Auswahlklausur 2011/2012

Aufgabe 1

Für neun verschiedene positive ganze Zahlen $d_1, d_2, ..., d_9$ betrachten wir das Polynom
$P(n) = (n+d_1)(n+d_2)\cdot ... \cdot(n+d_9)$.
Man zeige, dass eine ganze Zahl N mit folgender Eigenschaft existiert:
Für alle ganzen Zahlen $n \geq N$ ist die Zahl $P(n)$ durch eine Primzahl größer als 20 teilbar.

Lösung: Wir können der Aufgabenstellung gemäß $N > 0$ und $d_1 < d_2 < ... < d_9$ annehmen. Dann ist $k = d_9 - d_1 = \max\limits_{1\leq q<r\leq 9}(d_r - d_q)$. Es sei $z \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $2^z > k$.

Behauptung: Mit $N = 2^z \cdot 3^z \cdot 5^z \cdot 7^z \cdot 11^z \cdot 13^z \cdot 17^z \cdot 19^z$ ist eine Lösung für N gefunden.
Beweis: Wir nehmen an, dass für $n \geq N$ keiner der Faktoren von $P(n)$ einen Primfaktor größer als 20 besitzt und betrachten zunächst $n + d_1 = 2^{e_1^{(1)}} \cdot 3^{e_2^{(1)}} \cdot ... \cdot 19^{e_8^{(1)}}$. Wegen $n \geq N$ muss es dann wenigstens ein $e_j^{(1)}$ mit $e_j^{(1)} \geq z$ geben ($1 \leq j \leq 8$). Der zugehörige Primfaktor sei p. Somit ist $n + d_1$ durch $p^{e_j^{(1)}}$ teilbar. Wegen $p^{e_j^{(1)}} \geq 2^{e_j^{(1)}} \geq 2^z > k = \max\limits_{1\leq q<r\leq 9}(d_r - d_q)$ ist keine weitere der Zahlen $n + d_i$ durch $p^{e_j^{(1)}}$ teilbar ($2 \leq i \leq 9$), weil sonst $d_i - d_1$ durch $p^{e_j^{(1)}}$ teilbar wäre. Es ist also $e_j^{(1)} = \max\limits_{1\leq i\leq 9}(e_j^{(i)})$.
Betrachten wir nun $n + d_2$, so finden wird dort wegen $d_2 > d_1$ wenigstens ein $e_j^{(2)}$ mit $e_j^{(2)} > e_j^{(1)}$ sowie $e_j^{(2)} \geq z$. Daher besitzt auch $n + d_2$ ein im Bezug auf alle Faktoren maximales $e_j^{(2)}$. Dies gilt entsprechend für die anderen Faktoren $n + d_i$.
Da es für die 9 Faktoren des Polynoms jedoch nur 8 Primfaktoren kleiner als 20 gibt, entsteht hier nach dem Schubfachprinzip ein Widerspruch. Daher muss ein weiterer Primfaktor auftreten, durch den $P(n)$ teilbar ist.

Hinweise: Das hier angegebene N ist nicht das einzig mögliche. Häufig waren Beweise nicht streng genug. Man argumentierte etwa mit immer mehr dazukommenden Primzahlen, wenn n immer größer wird.

Aufgabe 2

Es sei *ABC* ein spitzwinkliges Dreieck mit dem Umkreismittelpunkt *O*. Ferner sei *k* ein Kreis mit folgenden Eigenschaften:
(1) Der Mittelpunkt *K* von *k* liegt im Inneren der Seite *BC*.
(2) *k* berührt *AB* in *B'* und *AC* in *C'*.
(3) *O* liegt auf dem kürzeren der beiden Bogenstücke *B'C'* von *k*.

Man beweise: Der Umkreis von *ABC* und *k* schneiden einander in zwei verschiedenen Punkten.

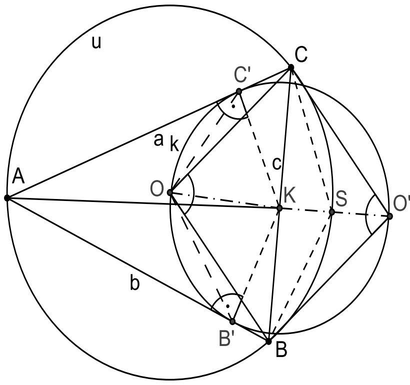
Lösung: Der Punkt O' ist Bildpunkt von *O* bei der Spiegelung an der Geraden *BC*. *S* ist der Schnittpunkt von KO' mit dem Umkreis *u* (siehe Figur).

GEFÖRDERT VOM
Bundesministerium für Bildung und Forschung

Die Geschäftsstelle der Bundesweiten Mathematik-Wettbewerbe wird gefördert vom Bundesministerium für Bildung und Forschung.
Sie wird bei Bildung & Begabung gemeinnützige GmbH geführt.
www.bildung-und-begabung.de | Eingetragen beim Registergericht Amtsgericht Essen HRB 22445 | St.-Nr. 206/5887/1089
Geschäftsführung: PD Dr. Elke Völmicke, Heinz Rüdiger Grunewald

Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft

Nach dem Satz vom Mittelpunktswinkel ist $\sphericalangle BOC = 2\alpha$.
Weil C' und B' im Inneren der Strecken AC bzw. AB liegen und O wegen der Spitzwinkligkeit innerhalb von ABC liegt, ist $\sphericalangle B'OC' > 2\alpha$. Im Viereck $AB'KC'$ gilt: $360° = 2\cdot 90° + \alpha + \sphericalangle C'KB'$, da die Winkel in den Berührpunkten C' und B' Rechte sind. Es folgt $\sphericalangle C'KB' = 180° - \alpha$.
Damit gilt im Sehnenviereck $B'O'C'O$:
$\sphericalangle B'OC' = 180° - \sphericalangle C'O'B' = 180° - \frac{1}{2}\sphericalangle C'KB'$
$= \frac{1}{2}(180° + \alpha)$. Somit ist $\frac{1}{2}(180° + \alpha) > 2\alpha$ und daher $\alpha < 60°$.



Im Sehnenviereck $ABSC$ folgt daraus $\sphericalangle CSB = 180° - \alpha > 120°$.
Aufgrund der Achsensymmetrie an BC ist $BO'CO$ ein Drachenviereck und es gilt:
$\sphericalangle CO'B = \sphericalangle BOC = 2\alpha < 120°$. Also ist $\sphericalangle CSB > \sphericalangle CO'B$.
Da S auf u liegt, ist $\sphericalangle CSB$ ein Umfangswinkel über der Sehne BC. Aus der letzten Ungleichung folgt dann, dass O' außerhalb von u liegt. Weil die Spiegelachse BC Durchmesser von k ist, liegt O' auf k. Somit gibt es mit O und O' je einen Punkt auf k, der innerhalb bzw. außerhalb von u liegt. Daraus folgt die Behauptung.

Hinweis: Die Behauptung gilt nicht für jedes spitzwinklige Dreieck, was den Zugang zu der Aufgabe deutlich erschwert hat. Eine einfache Lösung ist unter Verwendung von Inversion an u möglich.

Aufgabe 3

Es seien f und g zwei reelle Funktionen, die für jede reelle Zahl definiert sind. Ferner soll für alle reellen Zahlen x und y die Gleichung gelten:

$$g(f(x+y)) = f(x) + (2x+y)g(y)$$

Man bestimme alle möglichen Paare (f, g).

Lösung: Aus der gegebenen Gleichung (1) erhalten wir für $y = -2x$: $g(f(-x)) = f(x)$ (2). Damit wird (1) zu $f(-x-y) = f(x) + (2x+y)g(y)$ (3) und mit $x = 0$ zu $f(-y) = f(0) + yg(y)$ (4).
Ersetzen von f in (3) gemäß (4) liefert nach Subtraktion von $f(0)$:
$(x+y)g(x+y) = (2x+y)g(y) - xg(-x)$ (5). Mit $y = 0$ ergibt sich für $x \neq 0$: $g(x) + g(-x) = 2g(0)$ (6), was aber auch für $x = 0$, also für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt ist.
Wir setzen $h(x) := g(x) - g(0)$. Dann gilt $h(0) = 0$ sowie nach (6): $h(-x) = -h(x)$ (6*) sowie mit (5) und (6*): $(x+y)h(x+y) = (2x+y)h(y) + xh(x)$ (7). Vertauschen von x und y in (7) und Gleichsetzen liefert $xh(y) = yh(x)$ (8). Für $x, y \neq 0$ folgt daraus $h(x)/x = h(y)/y = \text{const}$.
Also ist $h(x) = c \cdot x$, was offensichtlich auch für $x = 0$ erfüllt ist. Mit $g(0) = b$ ergibt sich $g(x) = cx + b$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Mit $f(0) = a$ folgt aus (4): $f(x) = a - bx + cx^2$. (2) liefert $c(cx^2 + bx + a) + b = cx^2 - bx + a$, und nach Koeffizientenvergleich muss $c^2 = c$, $bc = -b$ sowie $ac + b = a$ gelten.
Fall 1: $c = 0$. Es ergibt sich $b = a = 0$ und $f(x) = 0$, $g(x) = 0$, womit (1) erfüllt ist.
Fall 2: $c = 1$. Dann ist $b = -b$, also $b = 0$, und a beliebig. Es ergibt sich $f(x) = x^2 + a$, $g(x) = x$.
Auch für dieses Funktionspaar liefert Einsetzen in (1) eine wahre Aussage. Also existieren die beiden Lösungspaare $(f, g) = (0, 0)$ bzw. $(f, g) = (x^2 + a, x)$ mit $a \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Sehr häufig wurden nur spezielle Lösungen erraten und für diese die Probe durch Einsetzen durchgeführt.