Auswahlwettbewerb zur Internationalen Mathematik–Olympiade

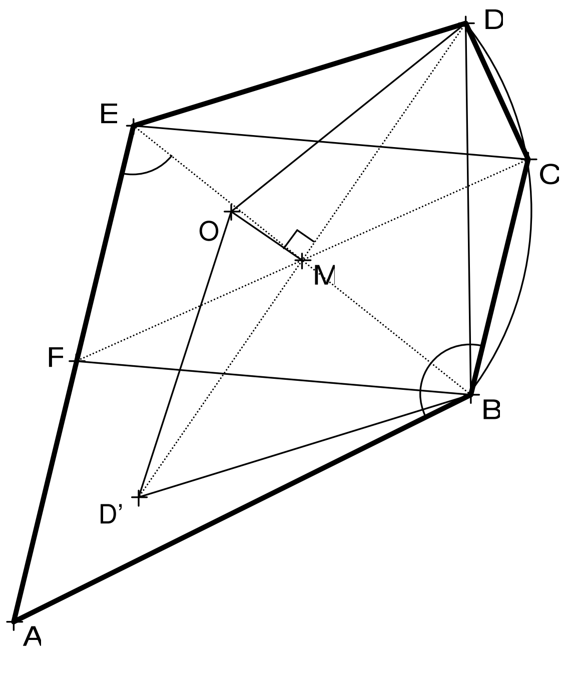
Lösungen zur 2. IMO-Auswahlklausur für 2011

Aufgabe 1
Eine Folge $x_1, x_2, ...$ ist definiert durch $x_1 = 1$ und $x_{2k} = -x_k$, $x_{2k-1} = (-1)^{k+1} x_k$ für alle $k \geq 1$.
Man zeige, dass für alle $n \geq 1$ gilt: $x_1 + x_2 + ... + x_n \geq 0$.

Lösung: Wir bezeichnen $S_n = x_1 + ... + x_n$ und führen einen Induktionsbeweis. Nachrechnen ergibt $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$ und damit $S_n \geq 0$ für $1 \leq n \leq 4$.
Nun nehmen wir an, dass $S_k \geq 0$ für alle natürlichen $k < n$ gilt, und behaupten $S_n \geq 0$.
Dazu unterscheiden wir vier Fälle.
<u>Fall 1</u>: $n = 4m$. Es gilt $S_n = \sum_{i=1}^{m} (x_{4i-3} + x_{4i-2} + x_{4i-1} + x_{4i}) = \sum_{i=1}^{m} (x_{2i-1} - x_{2i-1} - x_{2i} - x_{2i})$
$= -2\sum_{i=1}^{m} x_{2i} = 2\sum_{i=1}^{m} x_i = 2S_m \geq 0$.
<u>Fall 2</u>: $n = 4m+1$. Es gilt $S_n = 2S_m + x_{4m+1} = 2S_m + x_{2m+1} = 2S_m + (-1)^m x_{m+1}$.
Fall 2.1: *m* ist ungerade. Dann ist auch S_m ungerade, also $2S_m \geq 2$ und $S_n \geq 1 > 0$.
Fall 2.2: *m* ist gerade. Es gilt $S_n = 2S_m + x_{m+1} = S_m + S_{m+1} \geq 0$.
<u>Fall 3</u>: $n = 4m+2$. Es gilt $S_n = S_{n-2} + x_{4m+1} + x_{4m+2} = S_{n-2} + x_{2m+1} - x_{2m+1} = S_{n-2} \geq 0$.
<u>Fall 4</u>: $n = 4m+3$. Es gilt $S_n = S_{n+1} - x_{n+1} = 2S_{m+1} + x_{2m+2} = 2S_{m+1} - x_{m+1} = S_m + S_{m+1} \geq 0$.

Hinweise: Bei dieser oder anderen Fallunterscheidungen wurden manchmal nicht alle Möglichkeiten abgedeckt oder sorgfältig genug behandelt. Eine Bilanzierung derart, dass jedes Element auf lange Sicht gleich viele positive und negative Nachfolger erzeugt und die Behauptung folgt, weil das erste Glied positiv ist, reicht nicht.

Aufgabe 2
Gegeben sei ein konvexes Fünfeck *ABCDE* mit den Eigenschaften $BC \parallel AE$ und $\overline{AB} = \overline{AE}$.
Weiter sei *F* ein Punkt auf der Strecke *AE*, so dass $\overline{AB} = \overline{BC} + \overline{AF}$ sowie $\sphericalangle CBA = \sphericalangle FDC$ erfüllt ist. Schließlich sei *M* der Mittelpunkt der Strecke *CF* und *O* der Umkreismittelpunkt des Dreiecks *BCD*.
Man beweise: Wenn $DM \perp MO$, dann gilt $\sphericalangle FDC = 2 \cdot \sphericalangle ADB$.



Lösung: Aus den Bedingungen folgt
$\overline{FE} = \overline{AE} - \overline{AF} = \overline{AB} - (\overline{AB} - \overline{BC}) = \overline{BC}$.
Daher ist *BCEF* ein Parallelogramm, dessen beide Diagonalen *CF* und *BE* einander in *M* halbieren.
Wegen der Punktsymmetrie an M gilt $\sphericalangle CBE = \sphericalangle AEB$, und da *ABE* ein gleichschenkliges Dreieck ist, gilt $\sphericalangle AEB = \sphericalangle EBA$. Also ist *EB* die Winkelhalbierende von $\sphericalangle CBA$. Es folgt $\sphericalangle FDC = \sphericalangle CBA = 2 \cdot \sphericalangle AEB$, so dass nur noch $\sphericalangle AEB = \sphericalangle ADB$ zu zeigen ist.
Es sei D' der Spiegelpunkt von *D* an *M*.
Wegen $DM \perp MO$ ist dann

$\overline{OD'} = \overline{OD} = \overline{OB} = \overline{OC}$ und $D'BCD$ ist ein Sehnenviereck. Deshalb ist $\sphericalangle BDC = \sphericalangle BD'C$, und weil *BCDEFD'* sogar ein zu *M* punktsymmetrisches Sechseck ist, folgt weiter $\sphericalangle EDF = \sphericalangle BD'C = \sphericalangle BDC$. Also ist $\sphericalangle EDB = \sphericalangle FDC$, während andererseits $\sphericalangle BAE = 180° - 2 \cdot \sphericalangle AEB = 180° - \sphericalangle FDC$ gilt. Somit ist *ABDE* ein Sehnenviereck, und die Behauptung folgt aus dem Umfangswinkelsatz.

Hinweis: Hier gab es mehrere unvollständige, aber wenig falsche Lösungen. Die Aufgabe war zwar elementar zu lösen, wirkte aber sperrig durch die Fülle der Informationen und Schwierigkeiten bei der Anfertigung einer befriedigenden Skizze.

Aufgabe 3

Die Ecken und Kanten eines regulären *n*-Ecks seien im Uhrzeigersinn jeweils so von 1 bis *n* nummeriert, dass die Kante Nr. *i* auf die Ecke Nr. *i* folgt ($1 \le i \le n$).
Nun werden die Ecken mit nichtnegativen ganzen Zahlen e_i und die Kanten mit nichtnegativen ganzen Zahlen k_i so belegt, dass gilt:
(1) Das *n*-Tupel $(e_1, e_2, ..., e_n)$ ist eine Permutation des *n*-Tupels $(k_1, k_2, ..., k_n)$.
(2) Für jedes $i \in \mathbb{N}$ mit $1 \le i \le n$ gilt $k_i = | e_{i+1} - e_i |$, wobei $e_{n+1} = e_1$ ist.
a) Man beweise, dass für alle natürlichen Zahlen *n*, $n \ge 3$, solche *n*-Tupel existieren, die von $(0, ..., 0)$ verschieden sind.
b) Man bestimme zu jeder positiven natürlichen Zahl *m* die kleinste natürliche Zahl *n* mit folgender Eigenschaft: In den *n*-Tupeln $(e_1, e_2, ..., e_n)$ und $(k_1, k_2, ..., k_n)$ kommen jeweils alle natürlichen Zahlen von 0 bis *m* vor.

Lösung: a) Ein mögliches Beispiel für $n \ge 3$ ist $e_1 = e_2 = 1$, $e_i = 0$ für $3 \le i \le n$. Dies bedingt $k_2 = k_n = 1$ und $k_i = 0$ sonst. Offensichtlich sind alle Bedingungen erfüllt.
b) Wir beweisen, dass stets $n = m + 2$ gilt. Der Beweis erfolgt in zwei Schritten.
i) Es gilt $n \ge m + 2$: Weil die Zahl 0 in $(k_1, k_2, ..., k_n)$ vorkommt, müssen zwei Elemente von $(e_1, e_2, ..., e_n)$ gleich sein. Da außerdem jede der $m + 1$ natürlichen Zahlen von 0 bis *m* wenigstens einmal vorkommen muss, folgt $n \ge m + 2$.
ii) Wir geben ein Beispiel für $n = m + 2 \ge 3$: Es sei $(e_1, e_2, ..., e_n) = (0, m, 1, m - 1, ...)$. In dem *n*-Tupel werden die Zahlen alternierend bis zur Differenz 0 absteigend fortgesetzt, so dass $e_{n-1} = e_n$ gilt. Damit tritt jede natürliche Zahl von 0 bis *m* genau einmal, die Zahl e_n genau zweimal auf. Die Beträge der Differenzen treten von *m* abwärts bis zur 0 offensichtlich je einmal auf; die Differenz $|e_n - 0| = e_n$ tritt zweimal auf, weil $e_n < m$ ist. Damit sind die Eigenschaften (1) und (2) gezeigt.

Hinweis: Für Teil a) wurden 3 P. und für Teil b) 7 P. vergeben. Weder das Beispiel für a) noch das Beispiel für b) sind die einzig möglichen.