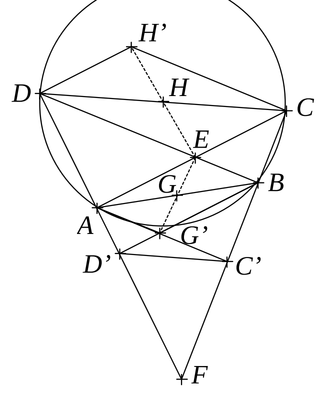
Auswahlwettbewerb zur Internationalen Mathematik-Olympiade

Lösungen zur 2. IMO-Auswahlklausur 2010

Aufgabe 1
Auf einem Tisch liegen nebeneinander 2009 Karten in einer Reihe. Zunächst ist bei allen Karten die Oberseite weiß und die Unterseite schwarz. Die Karten seien von 1 bis 2009 nummeriert.
Zwei Spieler *A* und *B* führend abwechselnd einen Spielzug aus, wobei *A* beginnt. Jeder Spielzug besteht darin, dass der Spieler eine Karte mit der Nummer *k* ($k < 1969$) wählt, deren weiße Seite oben liegt, und anschließend die Karten mit den Nummern $k, k+1, k+2, ..., k+40$ auf ihren Plätzen umdreht. Der letzte Spieler, der einen gültigen Spielzug machen konnte, gewinnt das Spiel.
a) Man entscheide, ob dieses Spiel notwendigerweise endet.
b) Für welchen der beiden Spieler existiert eine Gewinnstrategie?

Lösung: a) Wenn das Spiel nicht endet, dann muss wegen der höchstens 2^{2008} verschiedenen möglichen Spielzustände eine sich periodisch wiederholende Folge von Zuständen existieren. Dabei sei *k* die kleinste Nummer der Karten, die innerhalb dieser Periode umgedreht werden. Um die Karte mit der Nummer *k* von schwarz auf weiß umzudrehen, ist jedoch eine Karte mit einer kleineren Nummer als *k* auszuwählen – Widerspruch zur Minimalität! Also muss das Spiel nach endlich vielen Zügen enden.
b) Wir betrachten die Karten mit den Nummern $41k$, wobei $1 \le k \le 48$. Die höchste dieser Karten mit der Nummer 1968 ist die letzte, die ausgewählt werden kann. Bei jedem Spielzug wird genau eine dieser Karten umgedreht. Weil das Spiel endet, wenn alle Karten bis zur Nummer 1968 schwarz sind, und weil diese Karten zu Beginn alle weiß sind, ist nach jedem Doppelzug von *A* und *B* wieder eine gerade Anzahl von ihnen weiß; *B* findet also stets eine ungerade Anzahl weißer Karten aus dieser Menge vor und kann stets ziehen. Daher gewinnt *B* zwangsläufig das Spiel, egal wie er zieht.
Hinweise: Die Endlichkeit kann auch mit der Übersetzung der Spielzustände in eine monoton sich verändernde Binärzahl gezeigt werden. Würde in der Aufgabenstellung die Karte mit der Nummer 1969 auch zur Auswahl zugelassen, so hätte *A* eine Gewinnstrategie. Für Teil a) wurden 4 P. und für Teil b) 6 P. vergeben.

Aufgabe 2
Gegeben sei ein Sehnenviereck *ABCD*, dessen Diagonalen *AC* und *BD* sich im Punkt *E* schneiden und dessen Seiten *AD* und *BC* auf Geraden liegen, die sich im Punkt *F* schneiden. Die Mittelpunkte der Strecken *AB* und *CD* seien mit *G* bzw. *H* bezeichnet.
Man beweise, dass die Gerade *EF* in *E* den Kreis durch *E*, *G* und *H* berührt.



Lösung: Eine zentrische Streckung mit Zentrum *E* und Streckfaktor 2 bildet *G* auf G' und *H* auf H' ab. Dann ist (1) $\sphericalangle GHE = \sphericalangle G'H'E$. Wegen $\sphericalangle ABF = 180° - \sphericalangle CBA = \sphericalangle ADC$ und $\sphericalangle FAB = 180° - \sphericalangle BAD = \sphericalangle DCB$ (Sehnenviereck *ABCD*) sind die Dreiecke *FBA* und *FDC* ähnlich und werden durch eine Streckspiegelung mit Zentrum *F* an der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle BFA$ aufeinander abgebildet. Bei dieser Abbildung gilt insbesondere $A \to C$, $B \to D$, $G \to H$ (Mittelpunkte!). Aufgrund der Definition von H' halbieren sich die Diagonalen EH' und *CD*; daher ist $DECH'$ ein Parallelogramm und es gilt $\sphericalangle H'CD = \sphericalangle EDC = \sphericalangle BDC = \sphericalangle BAC = \sphericalangle BAE$. Analog gilt $\sphericalangle CDH' = \sphericalangle EBA$. Damit sind die Dreiecke *ABE* und CDH' ähnlich. Wegen der Ähnlichkeit von *FBA* und *FDC* sind auch die

Vierecke *FBEA* und $FDH'C$ ähnlich, so dass bei der betrachteten Streckspiegelung *E* auf H' abgebildet wird. Damit sind die Dreiecke *FGE* und FHH' ähnlich, und es gilt (2) $\sphericalangle GEF = \sphericalangle HH'F = \sphericalangle EH'F$.
Es seien C' und D' die Urbilder von *A* bzw. *B* bei der betrachteten Streckspiegelung. Dann ist wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke $FC'D'$ und *FAB* sowie wegen $|FB|/|FD'| = |FD|/|FB|$ das Viereck $D'C'BA$ ein zu *BADC* ähnliches Sehnenviereck. Sein Diagonalenschnittpunkt sei G''. Dann gilt $\sphericalangle G''AB = \sphericalangle C'AB = \sphericalangle C'D'B = \sphericalangle ABD = \sphericalangle ABE$ und es folgt $G''A \parallel BE$ sowie analog $G''B \parallel AE$. Also ist $AG''BE$ ein Parallelogramm und nach Definition von G' gilt $G' = G''$. Folglich geht G' bei der betrachteten Streckspiegelung in *E* über. Weil aber *E* in H' übergeht, wird G' bei der zweifachen Hintereinanderausführung in H' abgebildet. Bei dieser Hintereinanderausführung heben sich die beiden Spiegelungen auf und es bleibt eine zentrische Streckung an *F*. Deshalb sind *F*, G' und H' kollinear. Daraus folgt (3) $\sphericalangle FH'E = \sphericalangle G'H'E$.
Aus (1), (2) und (3) folgt nun $\sphericalangle GHE = \sphericalangle G'H'E = \sphericalangle FH'E = \sphericalangle FEG$.
Aus der Umkehrung des Sehnen-Tangentenwinkelsatzes ergibt sich daher, dass *FE* Tangente an den Kreis durch *E*, *G* und *H* ist.
Hinweise: Weitere Beweisideen verwenden die Polare und den Satz vom vollständigen Vierseit oder Inversion am Kreis. Ansätze mit analytischer Geometrie konnten nur mit wenigen Teilpunkten bedacht werden.

Aufgabe 3

Wir nennen eine natürliche Zahl *n* *ausgeglichen*, wenn $n = 1$ gilt oder wenn *n* als Produkt einer geraden Anzahl von (nicht notwendigerweise verschiedenen) Primfaktoren geschrieben werden kann. Zu jedem Paar (a, b) positiver ganzer Zahlen sei $P(x) = (x+a)(x+b)$.
a) Gibt es zwei verschiedene positive ganze Zahlen *a* und *b*, für die alle Zahlen $P(1), P(2), ..., P(50)$ ausgeglichen sind?
b) Man beweise: Wenn $P(m)$ für alle positiven ganzen Zahlen *m* ausgeglichen ist, dann gilt $a = b$.

Lösung: a) Die Antwort lautet „Ja". Damit $P(x)$ ausgeglichen ist, müssen $x+a$ und $x+b$ entweder beide eine gerade oder beide eine ungerade Anzahl von Primfaktoren besitzen. Hinsichtlich dieser Eigenschaft gibt es aber nur 2^{50}, also endlich viele verschiedene Muster bei 50 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen. Daher existieren zwei natürliche Zahlen *m* und *n*, so dass sie Startzahlen zweier identischer solcher Muster sind. Mit $a = m-1$ und $b = n-1$ folgt die Ausgeglichenheit von $P(1), P(2), ..., P(50)$.
b) Wir nehmen an, dass es unter der gegebenen Voraussetzung zwei verschiedene natürliche Zahlen *a* und *b* gebe; oBdA sei $b > a$. Dann gilt für jede natürliche Zahl $m > a$, dass $P(m-a) = m(m+b-a)$ ausgeglichen ist. Die Geradzahligkeit bzw. Ungeradzahligkeit der Anzahl der Primfaktoren tritt also für natürliche Zahlen größer als *a* mit der Periodenlänge $b-a$ periodisch auf. Insbesondere sind auch alle Vielfachen von $b-a$ vom gleichen Typ, sobald sie größer sind als *a*. Ein solches Vielfaches $k(b-a)$ hat jedoch einen Primfaktor weniger als $2k(b-a)$, Widerspruch zur Annahme. Also gilt $a = b$.
Hinweis: Der Widerspruch kann auf verschiedenste Art und Weise hergeleitet werden. Häufig wurden Sätze über Primzahlen in arithmetischen Folgen oder geeignete Quadratzahlen verwendet. Für Teil a) wurden 4 P. und für Teil b) 6 P. vergeben.