Auswahlwettbewerb zur Internationalen Mathematik-Olympiade

Lösungen zur 2. IMO-Auswahlklausur 2008

Aufgabe 1

Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen k und n mit folgender Eigenschaft:
Die Zahl $k^4 + n^2$ ist ohne Rest durch die Zahl $7^k - 3^n$ teilbar.

Lösung: Das einzige Lösungspaar ist $(k;n) = (2;4)$. Für jedes Lösungspaar sind $k^4 + n^2$ und $7^k - 3^n$ ganzzahlig, wobei $7^k - 3^n$ nicht notwendig positiv sein muss. Weil 7^k und 3^n ungerade sind, gilt $2 \mid 7^k - 3^n$ und daher $2 \mid k^4 + n^2$. Deshalb müssen k und n entweder beide gerade oder beide ungerade sein. Im letzten Fall gilt $k^4 + n^2 \equiv 2 \bmod 4$, wogegen $7^k - 3^n \equiv (-1)^k - (-1)^n \equiv 0 \bmod 4$ ist. Daher sind k und n beide gerade und wir setzen $k = 2a$ bzw. $n = 2b$ mit positiven ganzen Zahlen a, b. Es folgt $7^{2a} - 3^{2b} \mid (2a)^4 + (2b)^2$ und weiter $49^a - 9^b \mid 16a^4 + 4b^2$. Nun ist $49^a - 9^b \equiv 1^a - 1^b \equiv 0 \bmod 8$, so dass auch $16a^4 + 4b^2$ durch 8 teilbar sein muss.

Deshalb muss b gerade sein und ist als $b = 2c$ mit einer geeigneten positiven ganzen Zahl c darstellbar. Es folgt $7^{2a} - 9^{2c} = (7^a + 9^c)(7^a - 9^c) \mid 16(a^4 + c^2)$. Weil stets $7^a \neq 9^c$ gilt und beide Potenzen ungerade sind, ist $\left|7^a - 9^c\right| \geq 2$, so dass $7^a + 9^c \mid 8(a^4 + c^2)$ gelten muss.

Lemma 1: Für alle $a \geq 4$ ist $7^a > 8a^4$.

Beweis durch vollständige Induktion nach a:

Für $a = 4$ ist $2401 = 7^4 > 8 \cdot 4^4 = 2^{11} = 2048$ wahr. Nun sei $7^a > 8a^4$ vorausgesetzt.

Dann ist $7^{a+1} = 7 \cdot 7^a > 7 \cdot 8a^4 = 8(a+1)^4 \cdot \dfrac{7a^4}{(a+1)^4} > 8(a+1)^4 \cdot 7 \cdot (\tfrac{4}{5})^4 > 8(a+1)^4$. □

Lemma 2: Für alle $c \geq 1$ ist $9^c > 8c^2$.

Beweis durch vollständige Induktion nach c:

Für $c = 1$ ist $9 > 8$ wahr. Nun sei $9^c > 8c^2$ vorausgesetzt. Dann ist

$$9^{c+1} = 9 \cdot 9^c > 9 \cdot 8c^2 = 8(c+1)^2 \cdot \frac{9c^2}{(c+1)^2} > 8(c+1)^2 \cdot 9 \cdot (\tfrac{1}{2})^2 > 8(c+1)^2. \ \square$$

Aus den Lemmata folgt, dass für $a \geq 4$ wegen $7^a + 9^c > 8(a^4 + c^2)$ keine verlangten Zahlen k und n existieren. Also müssen nur noch $a = 1,2,3$ untersucht werden.

Lemma 3: Für alle $c \geq 3$ ist $9^c > 305 + 8c^2$.

Beweis durch vollständige Induktion nach c:

Für $c = 3$ ist $9^3 = 729 > 305 + 8 \cdot 3^2 = 377$ wahr. Nun sei $9^c > 305 + 8c^2$ vorausgesetzt. Dann ist $9^{c+1} > 9(305 + 8c^2) = 305 + 8 \cdot (305 + 9c^2)$. Wegen

$305+9c^2=(c+1)^2+8c^2-2c+304>(c+1)^2+c(c-2)>(c+1)^2$ für $c>2$ folgt die Behauptung. □

Fall 1: $a=1$. Für $c=1$ gilt $49-81=-32 \mid 32=16(1+1)$. Daher ist $(k;n)=(2;4)$ eine Lösung. Für $c=2$ gilt $7+81=88 \nmid 8(1+4)=40$. Für $c>2$ muss $7+9^c \leq 8+8c^2$ gelten, also $9^c<1+8c^2$. Dies widerspricht Lemma 3.

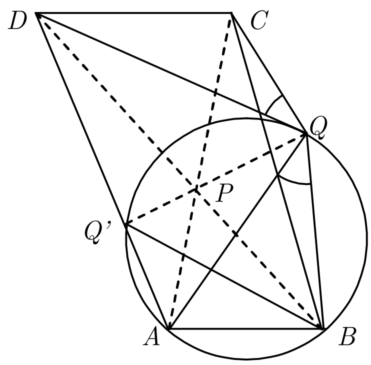
Fall 2: $a=2$. Für $c=1$ gilt $7^2+9^1=58 \nmid 8(2^4+1^2)=136$. Für $c=2$ gilt $49+81=130 \nmid 8(16+4)=160$. Für $c>2$ muss $49+9^c \leq 8(16+c^2)$ gelten, also $9^c \leq 79+8c^2$. Dies widerspricht Lemma 3.

Fall 3: $a=3$. Für $c=1$ gilt $343+9=352 \nmid 656=8(3^4+1)$. Für $c=2$ gilt $343+81=424 \nmid 680=8(3^4+4)$. Für $c>2$ muss $343+9^c \leq 8(81+c^2)$ gelten, also $9^c \leq 305+8c^2$. Dies widerspricht Lemma 3.

Aufgabe 2

Gegeben ist ein (allgemeines) Trapez $ABCD$, dessen Diagonalen sich im Punkt P schneiden. Ein Punkt Q liegt so zwischen den Parallelen AB und DC, dass $\sphericalangle AQB=\sphericalangle CQD$ gilt und die Gerade BC zwischen P und Q verläuft.

Man beweise, dass $\sphericalangle DQP=\sphericalangle BAQ$ gilt.



Lösung: Wegen $AB \parallel CD$ bildet die zentrische Streckung σ am Schnittpunkt P der Diagonalen mit Streckfaktor $k=-\dfrac{|CD|}{|AB|}=-\dfrac{|CP|}{|AP|}=-\dfrac{|DP|}{|BP|}$ den Punkt C auf A und D auf B ab. Es sei Q' der Bildpunkt von Q unter σ. Weil das Dreieck DQC unter σ auf das Dreieck $BQ'A$ abgebildet wird, sind beide Dreiecke ähnlich und mit der Voraussetzung gilt $\sphericalangle AQ'B=\sphericalangle CQD=\sphericalangle AQB$. Somit liegen A, B, Q und Q' auf einem Kreis und es gilt $\sphericalangle BAQ=\sphericalangle BQ'Q$. Das Dreieck $BQ'Q$ wird unter σ auf das Dreieck DQQ' abgebildet. Daher sind diese Dreiecke ähnlich und es folgt, da P, Q und Q' auf einer Geraden liegen, $\sphericalangle BQ'Q=\sphericalangle DQQ'=\sphericalangle DQP$.

Also ist $\sphericalangle BAQ=\sphericalangle BQ'Q=\sphericalangle DQP$, was zu beweisen war.

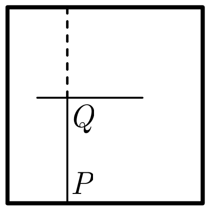
Aufgabe 3

Ein Quadrat wird so in $n>1$ Rechtecke zerlegt, dass die Seiten der Rechtecke parallel zu den Seiten des gegebenen Quadrats verlaufen. Jede Gerade, die parallel zu einer der Seiten des Quadrats verläuft und das Innere des Quadrats schneidet, soll dabei auch im Inneren wenigstens eines der Rechtecke verlaufen.

Man beweise, dass es dann in dieser Zerlegung stets ein Rechteck gibt, das keinen Punkt mit dem Rand des Quadrats gemeinsam hat.

Lösung: Wir beweisen die Kontraposition und nehmen dazu an, dass jedes Rechteck der Zerlegung mindestens einen Punkt mit dem Rand des Quadrates gemeinsam hat. Nach den Voraussetzungen hat es dann wenigstens eine seiner Seiten mit dem Rand des Quadrates gemeinsam. Daher lässt sich der Rand des Quadrates abschnittweise eindeutig den Rechtecken der Zerlegung zuordnen. Zwei nicht zusammenhängende Abschnitte können nicht zu demselben Rechteck gehören; sie müssten sonst einander gegenüberliegen und auf den anderen Seiten dieses Rechtecks schneiden Geraden das Innere des Quadrates, ohne im Inneren eines Rechtecks zu verlaufen.

Die Anzahl n dieser Abschnitte stimmt also mit der Anzahl n der Rechtecke überein. In den n Endpunkten der Abschnitte treffen auf dem Rand des Quadrates jeweils zwei Rechtecke zusammen und haben dort jeweils eine Ecke. Vier weitere Ecken der Rechtecke fallen mit den Ecken des Quadrates zusammen, so dass insgesamt $2n+4$ Rechtecksecken auf dem Rand des Quadrates liegen. Somit verbleiben $4n-(2n+4)=2n-4$ Ecken für das Innere des Quadrates.



Nun betrachten wir einen der n Punkte auf dem Rand des Quadrates, in denen zwei Rechtecke zusammenstoßen. Die Gerade senkrecht zur jeweiligen Quadratseite durch diesen Punkt P verläuft im Inneren des Quadrats zunächst auf je einer Seite der beiden Rechtecke. Damit diese Gerade innerhalb des Quadrates auch im Inneren eines Rechtecks verlaufen kann, muss sie eine Rechtecksseite schneiden, die parallel zur Quadratseite verläuft, von der wir ausgegangen sind. In diesem Verzweigungspunkt Q haben die zwei Rechtecke, deren Rand die Gerade vorher war (das müssen nicht mehr die beiden Rechtecke mit Eckpunkt P sein), jeweils einen Eckpunkt. Ein solcher Punkt Q existiert für jeden Ausgangspunkt P, und zwei verschiedene Ausgangspunkte können nicht denselben Verzweigungspunkt Q haben. Daher müssen wenigstens $2n$ Rechtecksecken im Inneren des Quadrates liegen, im Widerspruch zur oben bestimmten Höchstzahl $2n-4$. Also gibt es stets ein Rechteck, das keinen Punkt mit dem Rand des Quadrats gemeinsam hat.

Anmerkungen: Das äußere Rechteck wurde nur deshalb zum Quadrat erhoben, damit die Abfassung der Lösung einfacher ist. Die häufig vorgelegten Lösungen über die Konstruktion von unmöglichen Fällen ließen leicht Lücken entstehen, wenn mit der gegenseitigen Lage von Rechtecken oder dem Verlauf von Pfaden argumentiert wurde.