Auswahlwettbewerb zur Internationalen Mathematik–Olympiade

Lösungen zur 2. IMO-Auswahlklausur 2007

Aufgabe 1

Eine Folge $a_0, a_1, a_2, \ldots$ reeller Zahlen ist rekursiv definiert durch

$$a_0 = -1, \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{k+1} = 0 \quad \text{für } n \geq 1.$$

Man beweise, dass $a_n > 0$ für alle $n \geq 1$ gilt.

Lösung: Für $n = 1$ gilt $a_1 + \frac{1}{2}a_0 = 0$, also $a_1 = \frac{1}{2} > 0$. Nun gelte $a_i > 0$ für $1 \leq i < n$. Aus dem Gegebenen folgt $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_{n-k}}{k+1} + \frac{a_n}{1} + \frac{a_0}{n+1} = 0 \Leftrightarrow a_n = \frac{1}{n+1} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_{n-k}}{k+1}$ (*) und ebenso $0 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_{(n-1)-k}}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n-k}}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_{n-k}}{k} + \frac{a_0}{n} \Leftrightarrow \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_{n-k}}{k}$. Dies führt auf $\frac{1}{n+1} = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{a_{n-k}}{k} \cdot \frac{n}{n+1} \right)$ und wegen $n > k \Leftrightarrow \frac{n}{n+1} > \frac{k}{k+1} \Leftrightarrow \frac{n}{k(n+1)} > \frac{1}{k+1}$ auf $\frac{1}{n+1} > \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_{n-k}}{k+1}$. Mit (*) ergibt sich $a_n > \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_{n-k}}{k+1} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_{n-k}}{k+1} = 0$. Mit vollständiger Induktion gilt daher $a_n > 0$ für alle $n \geq 1$.

Aufgabe 2

Für ein konvexes Fünfeck $ABCDE$ gilt

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle CAD = \sphericalangle DAE \quad \text{sowie} \quad \sphericalangle CBA = \sphericalangle DCA = \sphericalangle EDA.$$

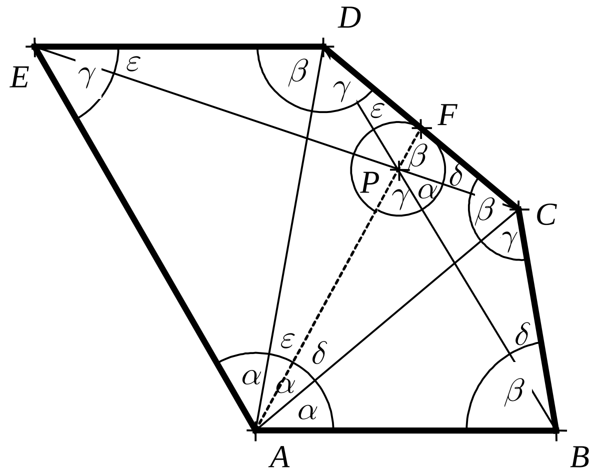
Der Schnittpunkt der Diagonalen BD und CE wird mit P bezeichnet.

Man beweise, dass die Gerade AP durch den Mittelpunkt der Seite CD verläuft.

Lösung: Wegen jeweils zweier gleicher Winkel sind die Dreiecke ABC, ACD und ADE ähnlich und wegen der Lage der Winkel gilt $\frac{|BC|}{|CD|} = \frac{|CD|}{|DE|}$. Weil gilt $\sphericalangle DCB = \sphericalangle EDC$ (Summe zweier gleicher Winkel), sind auch die Dreiecke BCD und CDE ähnlich. Daraus folgt $\sphericalangle BDC = \sphericalangle CED =: \varepsilon$ sowie $\sphericalangle CBD = \sphericalangle DCE =: \delta$. Somit sind die Dreiecke BCD und DPC ähnlich, woraus $\sphericalangle AEP = \gamma - \varepsilon = \sphericalangle ADP$ folgt. Daher ist $APDE$ ein Sehnenviereck. Völlig analog folgt, dass auch $ABCP$ ein Sehnenviereck ist. In der Figur sind die sich daraus ergebenden Winkel mit den Scheiteln A und P eingetragen. Insbesondere folgt daraus, dass die Dreiecke AFD und PFD sowie ACF und PCF ähnlich sind, wobei F der Schnittpunkt von AP und CD ist. Aus diesen

Ähnlichkeiten folgt $\frac{|DF|}{|FP|} = \frac{|AF|}{|DF|}$ sowie $\frac{|CF|}{|FP|} = \frac{|AF|}{|CF|}$, woraus sich einerseits $|AF| \cdot |FP| = |DF|^2$, andererseits $|AF| \cdot |FP| = |CF|^2$ ergibt. Dies liefert $|CF| = |DF|$, was zu beweisen war.

Anmerkung: Eine weitere, sehr elegante Lösung ergibt sich bei Verwendung des Satzes von CEVA im Dreieck ACD.



Aufgabe 3

Für jede reelle Zahl x mit $0 < x < 1$ sei $y \in \left]0;1\right[$ diejenige Zahl, deren n-te Nachkommastelle die (2^n)-te Nachkommastelle von x ist.

Man beweise: Wenn x rational ist, dann ist auch y rational.

Lösung: Eine rationale Zahl besitzt eine abbrechende oder eine periodische Dezimalbruchentwicklung. Eine abbrechende Dezimalbruchentwicklung lässt sich durch Anhängen von Nullen ins Unendliche fortsetzen und entspricht daher einer periodischen Dezimalbruchentwicklung mit der Periodenlänge 1.

Im Folgenden betrachten wir nur die Stellen hinter einer evtl. auftretenden Vorperiode der Länge v. Die erste Zweierpotenz größer als v sei mit 2^s bezeichnet, die Periodenlänge des Dezimalbruchs mit d.

Weil es nur endlich viele Restklassen mod d gibt, existieren zwei Zahlen 2^t und 2^{t+m}, die den gleichen Rest r mod d lassen, d.h. $2^t \equiv 2^{t+m} \bmod d$ mit $m \geq 1$. Dies bedeutet, dass die t. und die $(t+m)$. Nachkommastelle von y gleich sind.

Dann gilt aber auch $2 \cdot 2^t \equiv 2 \cdot 2^{t+m} \bmod d \Leftrightarrow 2^{t+1} \equiv 2^{t+m+1} \bmod d$, d.h. die $(t+1)$. und die $(t+m+1)$. Nachkommastelle von y sind gleich. Entsprechend sind alle $(t+k)$. und $(t+m+k)$. Nachkommastellen von y jeweils gleich ($0 \leq k \leq m$). Daher ist y periodisch mit der Periodenlänge m.

Auch y kann eine Vorperiode – höchstens von der Länge s – besitzen.

Diese Überlegungen sind unabhängig von der Basis $b \geq 2$ des Zahlsystems.

Anmerkung: Der bloße Hinweis auf das DIRICHLETsche Schubfachprinzip reicht nicht aus. Ein Zugang mit dem kleinen Satz von FERMAT liefert genauere Informationen z.B. über die Periodenlänge von y.