Internationale Mathematik-Olympiade

Auswahlwettbewerb zur IMO 2004

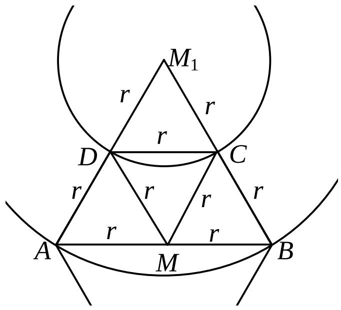
Lösungen zur 2. Auswahlklausur

Aufgabe 1

In der Ebene liegen n abgeschlossene Kreisscheiben $K_1, K_2,\ldots; K_n$ mit gleichem Radius r. Jeder Punkt der Ebene ist dabei in höchstens 2003 dieser Kreisscheiben enthalten.
Man beweise, dass jede Kreisscheibe K_i höchstens 14020 andere Kreisscheiben schneidet.

Lösung

Wir führen einen Beweis durch Widerspruch. Dazu nehmen wir zusätzlich zur Voraussetzung an, dass eine Kreisscheibe (oBdA sei dies K_1) mindestens 14021 andere Kreisscheiben schneidet. Die Mittelpunkte dieser Scheiben liegen dann offensichtlich alle in einer Kreisscheibe mit Radius $2r$ um den Mittelpunkt M_1 von K_1. Lägen 2003 oder mehr der Mittelpunkte dieser anderen Kreisscheiben in oder auf dem Rand von K_1, so würden diese Scheiben alle M_1 enthalten. Damit würde M_1 in mehr als 2003 Kreisscheiben enthalten sein, da M_1 auch in K_1 enthalten ist. Also müssen mindestens 14021 – 2002 = 12019 Mittelpunkte der anderen Kreisscheiben in einem Kreisring mit innerem Radius r und äußerem Radius $2r$ um M_1 liegen. Teilen wir diesen Ring in 6 gleich große Sektoren mit Innenwinkel 60°, so liegen nach dem Schubfachprinzip in mindestens einem Sektor wenigstens 2004 dieser Mittelpunkte.



In der Zeichnung ist dieser Sektor mit dem Mittelpunkt M der Strecke AB dargestellt. Aus $|AM_1| = |BM_1| = 2r$ und $\angle AM_1B =$ $60°$ folgt, dass ΔABM_1 gleichseitig ist. Also sind MD und MC seine Mittelparallelen und es folgt $|MA| = |MB| = |MC| = |MD| = r$. Daher liegt der Sektor vollständig in einem Kreis um M mit Radius r. Jede der wenigstens 2004 Kreisscheiben mit Mittelpunkten in diesem Sektor enthält also den Punkt M. Damit ist M aber in wenigstens 2004 Kreisscheiben enthalten – ein Widerspruch zur Annahme.

Aufgabe 2

Gegeben seien jeweils n reelle Zahlen $x_1,x_2,\ldots,x_n$ bzw. $y_1,y_2,\ldots,y_n$. Die Elemente einer $n\times n$-Matrix A seien folgendermaßen definiert: $(1\le i,j\le n)$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x_i + y_j \ge 0, \\ 0 & \text{wenn } x_i + y_j < 0 \end{cases}$$

Weiter sei B eine $n\times n$-Matrix mit Elementen 0 oder 1, so dass die Summe der Elemente in jeder Zeile und jeder Spalte von B gleich der Summe der Elemente in der entsprechenden Zeile bzw. Spalte von A ist.
Man beweise, dass dann $A=B$ gilt.

Lösung

Wir nehmen an, dass es eine Matrix B der geforderten Art gebe mit $B \ne A$. Nun betrachten wir in A nur noch diejenigen Elemente a_{ij}, die sich von den entsprechenden Elementen b_{ij} unterscheiden. Es muss mindestens ein solches Element geben. Alle anderen Elemente von A werden gestrichen. Dann ist innerhalb jeder Zeile bzw. Spalte die Anzahl der verbleibenden Nullen gleich der Anzahl der verbleibenden Einsen, da diese

Anzahlen in *B* bei gleicher Zeilen- bzw. Spaltensumme gerade vertauscht sind. Also tritt jede Zahl x_i in der verbleibenden Anordnung genauso oft als Summand einer Summe $x_i + y_j < 0$ auf wie als Summand einer Summe $x_i + y_j \geq 0$. Das Gleiche gilt für jede Zahl y_j.

Nun addieren wir alle Summen $x_i + y_j < 0$ mit $a_{ij} \neq b_{ij}$. Die Summe dieser Summen ist zwangsläufig < 0. Ebenso addieren wir alle Summen $x_i + y_j \geq 0$ mit $a_{ij} \neq b_{ij}$. Die Summe dieser Summen ist zwangsläufig ≥ 0. Da aber jede der Zahlen x_i und y_j gleich häufig in beiden Summen auftritt, müssen diese Summen den gleichen Wert haben – Widerspruch! Daher kann es keine verschiedenen Elemente in *A* und *B* geben und es gilt $A = B$.

Aufgabe 3

Es sei *ABC* ein gleichschenkliges Dreieck mit $\overline{AC} = \overline{BC}$ und Inkreismittelpunkt *I*. Ferner sei *P* ein Punkt im Inneren von *ABC* auf dem Umkreis des Dreiecks *BIA*. Die Parallelen zu *CA* und *CB* durch *P* schneiden *AB* in *D* bzw. *E*. Die Parallele zu *AB* durch *P* schneidet *CA* und *CB* in *F* bzw. *G*.
Man zeige, dass sich die Geraden *DF* und *EG* auf dem Umkreis des Dreiecks *ABC* schneiden.

Lösung

Lösung: Wegen $\angle FPE = \angle FGB = 180° - \angle CBA = 180° - \angle BAC = 180° - \angle FAE$ (Parallelität und Gleichschenkligkeit) ist *FAEP* ein Sehnenviereck. Analog erweist sich *GPDB* als Sehnenviereck. Ihre beiden Umkreise schneiden sich in *P* und einem weiteren Punkt, den wir mit *S* bezeichnen. Nun folgt weiter $\angle ESP = \angle EAP = \angle BAP = 180° - \angle APB - \angle PBA$
$= 180° - \angle AIB - \angle PBA = \angle BAI + \angle IBA - \angle PBA = 2 \cdot \frac{1}{2} \angle CBA - \angle PBA = \angle CBP = \angle GBP$
$= \angle GSP$ (Umfangswinkel und Symmetrie). Also liegt *S* auf der Geraden *EG*; entsprechend sind *S*, *D* und *F* kollinear. Deshalb ist *S* der Schnittpunkt von *DF* und *EG*. Es bleibt zu beweisen, dass dieser Punkt auf dem Umkreis von *ABC* liegt.
In der Tat gilt
$\angle BSA = \angle PSA + \angle BSP = 180° - \angle AFP + 180° - \angle PGB =$
$\angle GFC + \angle CGF = 180° - \angle FCG = 180° - \angle ACB$. Somit ist *ASBC* ein Sehnenviereck, was zu beweisen war.