Auswahlwettbewerb zur IMO 2003

Lösungen zur 2. Auswahlklausur

Aufgabe 1

Man bestimme alle Funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$f(f(x)+y)=2x+f(f(y)-x)$$

für alle $x,y\in\mathbb{R}$.

Lösung

Für eine beliebige reelle Zahl *z* setzen wir $a=f(z)$, $b=z+f(0)$, $n=f(\frac{a+b}{2})$ und $m=f(0)-\frac{a+b}{2}$. Wegen $\mathbb{D}_f=\mathbb{R}$ sind *a*, *b*, *n* und *m* wohlbestimmt. Einsetzen von $x=0$, $y=z$ in (*) liefert $f(z+f(0))=f(f(z))$, also $f(a)=f(b)$ (I).

Einsetzen von $x=m$ und $y=a$ bzw. $y=b$ in (*) liefert $\begin{cases} f(f(m)+a)=2m+f(f(a)-m) \\ f(f(m)+b)=2m+f(f(b)-m) \end{cases}$,

was wir wegen (I) zu $f(f(m)+a)=f(f(m)+b)$ (II) zusammenfassen können.

Einsetzen von $x=a$ bzw. $x=b$ und $y=n$ in (*)liefert $\begin{cases} f(f(a)+n)=2a+f(f(n)-a) \\ f(f(b)+n)=2b+f(f(n)-b) \end{cases}$,

was wir wegen (I) zu $2a+f(f(n)-a)=2b+f(f(n)-b)$ (III) zusammenfassen können.

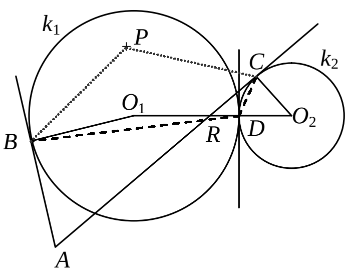
Einsetzen von $x=\frac{a+b}{2}$, $y=0$ in (*) liefert $f(f(\frac{a+b}{2}))=a+b+f(f(0)-\frac{a+b}{2})$, also $f(n)=a+b+f(m)$ oder, anders formuliert, $f(n)-a=f(m)+b$ bzw. $f(n)-b=f(m)+a$. Dies liefert mit (III) sofort $2a+f(f(m)+b))=2b+f(f(m)+a)$, woraus mit (II) nun $a=b$ folgt, also $f(z)=z+f(0)$. Damit ist gezeigt, dass jede Funktion *f*, die (*) erfüllt, die Form $f(x)=x+c$ $(c=\text{konst.})$ haben muss. Einsetzen in (*) bestätigt, dass jedes *f* dieser Form die gegebene Gleichung tatsächlich erfüllt: $f(f(x)+y)=x+y+2c=2x+f(f(y)-x)$.

Anmerkung: Zusätzliche Eigenschaften von *f*, wie etwa Injektivität, Monotonie oder Differenzierbarkeit, dürfen nicht vorausgesetzt, sondern müssen bewiesen werden.

Aufgabe 2

Es sei *B* ein beliebiger Punkt auf einem Kreis k_1 und es sei *A* ein von *B* verschiedener Punkt auf der Tangente an k_1 in *B*. Ferner sei *C* ein Punkt außerhalb von k_1 mit der Eigenschaft, dass die Strecke *AC* den Kreis k_1 in zwei verschiedenen Punkten schneidet. Schließlich sei k_2 der Kreis, der die Gerade (*AC*) in *C* berührt und den Kreis k_1 in einem Punkt *D* berührt, welcher auf der anderen Seite von (*AC*) liegt wie *B*.
Man beweise, dass der Umkreismittelpunkt des Dreiecks *BCD* auf dem Umkreis des Dreiecks *ABC* liegt.

Lösung



Wir bezeichnen die Mittelpunkte der Kreise k_1 und k_2 mit O_1 bzw. O_2. Die Lösung setzt nun voraus, dass $\angle CDB$ stumpf ist (siehe Fig.); andernfalls sind lediglich einige Winkel modulo 180° zu vertauschen.
Es sei *P* der Umkreismittelpunkt des Dreiecks *BDC*; dann ist nach dem Satz vom Mittelpunktswinkel
$\angle BPC=2\cdot(180°-\angle CDB)=360°-2\cdot\angle CDB$ (1).
P liegt dann auf dem Umkreis von Dreieck *ABC*, wenn *ACPB* ein Sehnenviereck ist; dies gilt dann, wenn $\angle BPC=180°-\angle CAB$ ist.

Um dies zu beweisen, berechnen wir $\angle CDB$. Da k_1 und k_2 sich in *D* berühren, liegt *D* auf der Strecke O_1O_2 und es gilt $\angle CDB = 180° + \angle O_1DB - \angle O_2DC$ (2). Da k_1 die Gerade (*AB*) berührt, ist $\angle ABO_1 = 90°$, also $\angle ABD + \angle DBO_1 = 90°$. Da *B* und *D* auf k_1 liegen, ist das Dreieck BDO_1 gleichschenklig mit $\angle O_1DB = \angle DBO_1$. Somit ist $\angle O_1DB = 90° - \angle ABD$ (3). Da k_2 die Gerade (*AC*) berührt, ist $\angle ACO_2 = 90°$, also $\angle ACD + \angle DCO_2 = 90°$. Da *C* und *D* auf k_2 liegen, ist das Dreieck CDO_2 gleichschenklig mit $\angle O_2DC = \angle DCO_2$. Somit ist $\angle O_2DC = 90° - \angle ACD$ (4). Einsetzen von (3) und (4) in (2) liefert
$\angle CDB = 180° + (90° - \angle ABD) - (90° - \angle ACD) = 180° - \angle ABD + \angle ACD$ (5).
Nun betrachten wir den Schnittpunkt *R* von (*AC*) und (*BD*) und folgern
$\angle ABD = \angle ABR = 180° - \angle RAB - \angle BRA = 180° - \angle CAB - \angle BRA$ sowie
$\angle ACD = \angle RCD = 180° - \angle CDR - \angle DRC = 180° - \angle CDB - \angle BRA$. Aus (5) ergibt sich
$\angle CDB = 180° + \angle CAB - \angle CDB$, also $2 \cdot \angle CDB = 180° + \angle CAB$. Einsetzen in (1) liefert
$\angle BPC = 360° - (180° + \angle CAB) = 180° - \angle CAB$. Damit ist alles gezeigt.

Anmerkung: Da k_1 von der Strecke *AC* geschnitten wird, kann k_2 die Gerade (*AC*) nicht – von *A* aus – vor dem Schnitt mit k_1 berühren. Auch darf *C* nicht speziell gewählt werden.

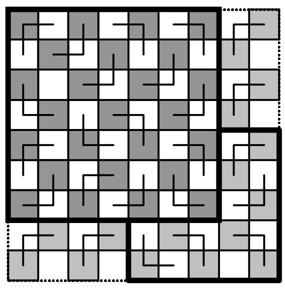
Aufgabe 3

Es sei *n* eine ungerade natürliche Zahl. Die Felder eines $n \times n$-Schachbretts seien abwechselnd schwarz und weiß gefärbt, wobei die Eckfelder schwarz sind. Ferner sei ein *Trimino* definiert als eine L-förmige Figur aus drei verbundenen Einheitsquadraten.
a) Für welche Werte von *n* ist es möglich, alle schwarzen Felder des Schachbretts durch nicht überlappende Triminos zu überdecken?
b) Welches ist bei möglicher Überdeckung die minimale Anzahl der jeweils benötigten Triminos?

Hinweis: Zwei Triminos überlappen sich, wenn sie wenigstens ein Einheitsquadrat gemeinsam bedecken.

Lösung

a) und b): Wir zählen die Reihen des Schachbretts von oben. Das $n \times n$-Schachbrett hat $\frac{n+1}{2}$ Reihen mit *ungerader* Nummer und in jeder dieser Reihen $\frac{n+1}{2}$ schwarze Felder. Jedes dieser $(\frac{n+1}{2})^2$ schwarzen Quadrate muss von einem anderen Trimino überdeckt werden, daher sind wenigstens $(\frac{n+1}{2})^2$ Triminos erforderlich. Da jedes aus 3 Quadraten besteht, muss wegen des Überlappungsverbots gelten: $3(\frac{n+1}{2})^2 \le n^2$. Für 1, 3 und 5 folgt $3 \le 1$, $12 \le 9$, $27 \le 25$. Also ist für $n < 7$ eine verlangte Überdeckung nicht möglich.



Die Figur zeigt als Verankerung eine Überdeckung für $n = 7$ mit $(\frac{n+1}{2})^2 = 16$ Triminos und den Schritt $n \to n+2$, mit dem für jedes $n \ge 7$ die Existenz einer Überdeckung bewiesen ist. Bei diesem Schritt wird dem $n \times n$-Schachbrett, dessen Überdeckung mit $(\frac{n+1}{2})^2$ Steinen vorausgesetzt ist, in der rechten unteren Ecke ein „L" angesetzt, das 5 Felder breit und hoch ist, und anschließend durch 2×2-Felder mit je einem passenden Trimino ergänzt. Das „L" enthält 5 Triminos und die beiden $2 \times (n-5)$-Rechtecke zusammen $n-3$ Triminos. Es ergeben sich also $(\frac{n+1}{2})^2 + n - 3 + 5 = \frac{n^2+6n+9}{4} = (\frac{n+3}{2})^2$ Triminos, die Mindestzahl für das $(n+2) \times (n+2)$-Schachbrett. Mit vollständiger Induktion folgt die Behauptung.

Anmerkung: Nur alle schwarzen Felder sollten überdeckt werden; es können also weiße Felder frei bleiben. Selbstverständlich ragen die Triminos nicht über das Schachbrett hinaus. Zu einer vollständigen Lösung gehört auch der Nachweis, dass beim Schritt $n \to n+2$ die hinzugefügten Triminos mit der minimalen Anzahl verträglich sind, sowie die Erwähnung von $n = 1$.