Internationale Mathematik-Olympiade

Auswahlwettbewerb zur IMO 2002

Lösungen zur 2. Auswahlklausur

Aufgabe 1

Es sei P die Menge aller geordneter Paare (p,q) von nichtnegativen ganzen Zahlen.
Man bestimme alle Funktionen $f: P \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$f(p,q) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } pq = 0 \\ 1 + \frac{1}{2} f(p+1, q-1) + \frac{1}{2} f(p-1, q+1) & \text{sonst} \end{cases}.$$

Lösung

Die einzige solche Funktion ist $f(p,q) = p \cdot q$.
Diese Funktion erfüllt offensichtlich für $p = 0$ oder $q = 0$ die erste Bedingung. Für $pq \neq 0$ gilt $1 + \frac{1}{2} f(p+1, q-1) + \frac{1}{2} f(p-1, q+1) = 1 + \frac{1}{2}(p+1)(q-1) + \frac{1}{2}(p-1)(q+1) = pq$, so dass auch die zweite Bedingung erfüllt ist.
Nun muss noch gezeigt werden, dass es keine andere Funktion mit diesen Eigenschaften gibt. Dazu setzen wir $f(p,q) = pq + g(p,q)$. Für $pq \neq 0$ ergibt sich aus der zweiten Bedingung $pq + g(p,q) = 1 + \frac{1}{2}((p+1)(q-1) + g(p+1, q-1) + (p-1)(q+1) + g(p-1, q+1))$, also $g(p,q) = \frac{1}{2}(g(p+1, q-1) + g(p-1, q+1))$. Daher bilden die Zahlen $g(0, p+q)$, $g(1, p+q-1)$, $g(2, p+q-2)$, ..., $g(p+q-1, 1)$, $g(p+q, 0)$ eine arithmetische Folge. Da ihre Außenglieder $g(0, p+q)$ und $g(p+q, 0)$ gleich Null sind, hat jedes Folgenglied den Wert Null. Folglich ist $g(p,q) = 0$ für alle nichtnegativen ganzen Zahlen und daher $f(p,q) = p \cdot q$ die einzige Lösung.

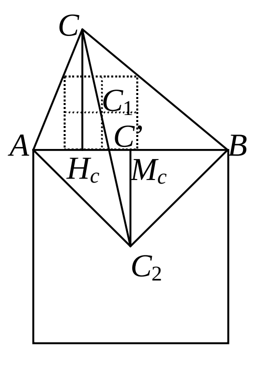
Anmerkung: Der zweite Teil des Beweises ist der bedeutendere. Dabei reicht es nicht, nur bestimmte Typen von Funktionen auszuschließen, wie es einige Teilnehmer versucht haben.

Aufgabe 2

In ein spitzwinkliges Dreieck *ABC* wird ein Quadrat mit Mittelpunkt A_1 so einbeschrieben, dass zwei Ecken auf *BC* und je eine auf *AB* bzw. *AC* liegen. Analog sind die Quadrate mit den Mittelpunkten B_1 bzw. C_1 definiert.
Man beweise, dass die Geraden AA_1, BB_1 und CC_1 einen gemeinsamen Schnittpunkt haben.

Lösung

Zusätzlich zur gegebenen Figur betrachten wir das nach außen errichtete Quadrat über der Seite *AB* mit dem Mittelpunkt C_2. Da es eine zentrische Streckung gibt, welche das einbeschriebene Quadrat mit Mittelpunkt C_1 in das nach außen errichtete Quadrat überführt, liegen *C*, C_1 und C_2 auf einer Geraden.

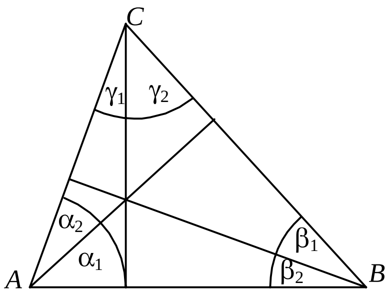


Die Höhe h_c schneidet *AB* in H_c und es sei $|AH_c| = p$, $|H_cB| = q$.
Ferner sei M_c der Mittelpunkt von *AB* und C' der Schnittpunkt von CC_2 mit *AB*. Schließlich setzen wir $|AC'| = c_1$ und $|C'B| = c_2$. Alle Teilstrecken von *AB* existieren wegen der Spitzwinkligkeit des Dreiecks *ABC*. Für die anderen Dreiecksseiten seien entsprechende Punkte und Abschnitte analog definiert.

Nach den Strahlensätzen gilt $\frac{|H_cC'|}{|CH_c|} = \frac{|C'M_c|}{|M_cC_2|}$, d.h. $\frac{c_1 - p}{h_c} = \frac{\frac{1}{2}c - c_1}{\frac{1}{2}c} \Rightarrow c_1 = \frac{c(p+h_c)}{c+2h_c}$.

Analog ist $c_2 = \frac{c(q+h_c)}{c+2h_c}$ und wir erhalten $\frac{c_1}{c_2} = \frac{\frac{p}{h_c}+1}{\frac{q}{h_c}+1}$. (Für $\alpha = \beta$ ist $\frac{c_1}{c_2} = 1$.)

Die Winkel zwischen den Höhen und den jeweils anliegenden beiden Seiten seien zyklisch mit γ_1, γ_2 bzw. α_1, α_2 bzw. β_1, β_2 bezeichnet. Dann gilt $\alpha_1 = \gamma_2 (= 90° - \beta)$, $\beta_1 = \alpha_2 (= 90° - \gamma)$ und $\gamma_1 = \beta_2 (= 90° - \alpha)$. Ferner ist $\frac{p}{h_c} = \tan\gamma_1$ und $\frac{q}{h_c} = \tan\gamma_2$, also $\frac{c_1}{c_2} = \frac{\tan\gamma_1 + 1}{\tan\gamma_2 + 1}$. Analog gilt $\frac{a_1}{a_2} = \frac{\tan\alpha_1 + 1}{\tan\alpha_2 + 1}$ und $\frac{b_1}{b_2} = \frac{\tan\beta_1 + 1}{\tan\beta_2 + 1}$. Damit ist



$$\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{c_1}{c_2} = \frac{(\tan\alpha_1 + 1)(\tan\beta_1 + 1)(\tan\gamma_1 + 1)}{(\tan\alpha_2 + 1)(\tan\beta_2 + 1)(\tan\gamma_2 + 1)} = \frac{\tan\alpha_1 + 1}{\tan\gamma_2 + 1} \cdot \frac{\tan\beta_1 + 1}{\tan\alpha_2 + 1} \cdot \frac{\tan\gamma_1 + 1}{\tan\beta_2 + 1} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

Nach der Umkehrung des Satzes von CEVA schneiden sich daher die Geraden $AA' = AA_1$, $BB' = BB_1$ und $CC' = CC_1$ in einem Punkt.

Anmerkung: Einige Teilnehmer haben vermutet, die Geraden AA_1 etc. seien die Winkelhalbierenden des gegebenen Dreiecks. Diese Vermutung ist falsch, wie man an einem sehr spitzen, fast rechtwinkligen Dreieck sieht. Der Satz von CEVA ist zum Beweis nicht notwendig; es gibt andere Lösungsmöglichkeiten, z.B. mit Drehstreckungen.

Aufgabe 3

Man beweise, dass es keine positive ganze Zahl *n* mit der folgenden Eigenschaft gibt:
Für *k* = 1,2,...,9 ist die – in dezimaler Schreibweise – linke Ziffer von (*n* + *k*)! gleich *k*.

Lösung

Wir nehmen an, dass es eine Zahl *n* mit der verlangten Eigenschaft gibt. Dann kann keine der Fakultäten eine Zehnerpotenz sein, weil ab 3! alle Fakultäten durch 3 teilbar sind und die ersten Fakultäten offensichtlich nicht die verlangte Eigenschaft haben. Es kann auch keine der Zahlen $n+2$, ..., $n+9$ eine Zehnerpotenz sein, weil sonst die Anfangsziffer zweier aufeinanderfolgender Fakultäten in der betrachteten Folge dieselbe wäre. Somit gibt es ein *j* mit $10^j < n+2 < ... < n+9 < 10^{j+1}$ (1). Weil $(n+8)!$ mit einer 8 und $(n+9)!$ mit einer 9 endet, gibt es natürliche Zahlen *a* und *b* mit $9 \cdot 10^a < (n+9)! < 10^{a+1}$ und $8 \cdot 10^b < (n+8)! < 9 \cdot 10^b$, was auf $10^{a-b} < n+9 < \frac{5}{4} \cdot 10^{a-b}$ führt.

Mit (1) folgt $j = a - b$ und $10^j < n+2 < ... < n+9 < \frac{5}{4} \cdot 10^j$ (2).

Da $(n+1)!$ mit 1 anfängt, gibt es ein *m* mit $10^m < (n+1)! < 2 \cdot 10^m$, während aus (2) folgt: $10^{3j} < (n+2)(n+3)(n+4) < (\frac{5}{4})^3 \cdot 10^{3j}$. Multiplikation der beiden letzten Ungleichungen liefert $10^{3j+m} < (n+4)! < 2 \cdot \frac{125}{64} \cdot 10^{3j+m}$, was wegen $\frac{250}{64} < 4$ zu $10^{3j+m} < (n+4)! < 4 \cdot 10^{3j+m}$ abgeschwächt werden kann. Daraus folgt, dass die Zahl $(n+4)!$ nicht mit 4, sondern mit 1, 2 oder 3 beginnen würde – im Widerspruch zur Voraussetzung.

Anmerkung: Die meisten Teilnehmer, die sich auf diese oder ähnliche Abschätzungen eingelassen hatten, waren dann auch erfolgreich. Allerdings gab es gerade bei dieser Aufgabe z.T. sehr unübersichtliche Darstellungen.