Lösungen zur 1. Auswahlklausur 2011/2012

Aufgabe 1 Man bestimme die kleinste positive Zahl k, für die folgendes der Fall ist: Wenn Kain in solcher Weise ganze Zahlen in die Zellen eines 2011×2011-Schachbrettes schreibt, dass die 4022 Summen, die man durch Addition aller Zahlen einer Zeile oder Spalte erhalten kann, paarweise übereinstimmen, so ist es für Abel möglich, durch Abänderung der Einträge aus nur k der Zellen zu erreichen, dass diese 4022 Summen paarweise verschieden werden.

Lösung: $k = 2681$. Beweis von $k \geq 2681$: Abel muss mindestens 4021 der Summen ändern, o. B. d. A. alle Spaltensummen und alle bis auf höchstens eine Zeilensumme. Um die Spaltensummen zu ändern, muss Abel in jeder Spalte mindestens einen Eintrag abändern. Dies erledige Abel o. B. d. A. zuerst und pausiere dann. Zum Zeitpunkt dieser Pause seien n Zeilen unverändert. Somit muss Abel in $n-1$ dieser Zeilen einen Eintrag abändern, damit sich die Zeilensummen unterscheiden können. Dies erledige Abel o. B. d. A. im Anschluss und pausiere wieder. Für $n \geq 671$ sind nun bereits mindestens 2681 Einträge abgeändert. Nun sei $n \leq 670$. Eine Zelle heiße *unzureichend*, wenn Abel ihren Eintrag geändert hat, aber keinen weiteren Eintrag einer Zelle in derselben Zeile oder Spalte. Da die Zeilen- und Spaltensumme einer unzureichenden Zelle gleich sind, darf am Ende keine Zelle unzureichend sein. Es gibt während Abels erster Pause mindestens $2011 - 2n$ unzureichende Zellen. Durch jede Änderung bis zur zweiten Pause kann Abel höchstens eine dieser unzureichenden Zellen (durch Ändern eines Eintrags in derselben Spalte) eliminieren, durch jede Änderung nach der zweiten Pause höchstens zwei unzureichende Zellen. Daher sind nach der zweiten Pause mindestens $\frac{1}{2}(2011 - 2n - (n-1))$ Einträge abzuändern, also zusammen mindestens $2011 + (n-1) + \frac{1}{2}(2011 - 2n - (n-1)) = 3016 - \frac{n}{2} \geq 2681$.
Beweisidee zu $k \leq 2681$: Für $1 \leq m, n \leq 2011$ sei die Zelle in Zeile m und Spalte n mit $\langle m; n\rangle$ bezeichnet. Abel erhöht den Eintrag von 2681 Zellen $\langle m; n\rangle$ jeweils um $2(m+n)+1$, und zwar von $\langle 2; 1\rangle$ sowie für $l = 1, \ldots, 670$ von $\langle 3l-1; 3l-1\rangle$, $\langle 3l; 3l-1\rangle$, $\langle 3l+1; 3l\rangle$ und $\langle 3l+1; 3l+1\rangle$.

Bemerkungen: Manchmal wurde argumentiert, dass mit Abändern zweier Einträge in derselben Zeile (oder Spalte) Abel drei Summen ändern könne und dies optimal sei, und daraus $k \geq 2681$ gefolgert. Dabei wurde aber implizit angenommen, dass eine Anordnung der Zellen mit geänderten Einträgen nach der Art wie der im Beweis von $k \leq 2681$ bereits optimal ist.

Aufgabe 2 Es sei Γ der Umkreis des bei C gleichschenkligen Dreiecks ABC. Im Inneren der Seite $\overline{BC}$ liege der Punkt M. Es gebe einen Punkt N auf dem Strahl AM, für den M zwischen A und N liegt und der $|AN| = |AC|$ erfüllt. Der Umkreis des Dreiecks CMN schneide Γ in den beiden verschiedenen Punkten C und P. Die Geraden AB und CP mögen sich in einem Punkt Q treffen. Man beweise, dass $\measuredangle BMQ = \measuredangle QMN$.

Lösung: Die Idee zur Lösung geht von der Beobachtung aus, dass die Forderung $|AN| = |AC| = |BC|$ unverändert bleibt, wenn man A und C sowie N und B miteinander vertauscht. Dies legt nahe, dass man auch den Umkreis des Dreiecks AMB betrachten sollte. Der zweite Schnittpunkt der Umkreise von AMB und CMN lässt sich schließlich als Inkreismittelpunkt von AMC identifizieren.
Es sei I der Inkreismittelpunkt des Dreiecks AMC. Bekanntlich ist $\measuredangle MIC = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\measuredangle MAC = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\measuredangle NAC$, und weil das Dreieck ANC bei A gleichschenklig ist, ist $\measuredangle NAC = \pi - 2\measuredangle CNA$, also ist $\measuredangle MIC = \pi - \measuredangle CNA = \pi - \measuredangle CNM$, und weil I und N bezüglich der Geraden CM in verschiedenen Halbebenen liegen, folgt aus dem Satz vom Sehnenviereck, dass $IMNC$ ein Sehnenviereck ist, d. h., dass I auf dem Umkreis von CMN liegt. Auf Grund der eingangs angesprochenen Symmetrie liegt I auch auf dem Umkreis von ABM. Da I als Inkreismittelpunkt ein innerer Punkt des Dreiecks AMC ist, ist insbesondere $I \neq M$, und damit ist die Gerade IM die Potenzgerade der Umkreise von ABM und CMN. Da weiterhin die Gerade AB die Potenzgerade der Umkreise von ABC und ABM und die Gerade CP die Potenzgerade der Umkreise von ABC und CMN ist, schneiden sich die Geraden IM, AB und CP in einem Punkt. Dieser Punkt ist nach Definition Q, d. h. Q liegt auf der Winkelhalbierenden IM des Winkels CMA, aber diese ist identisch mit der Winkelhalbierenden des Winkels BMN, folglich ist $\measuredangle BMQ = \measuredangle QMN$.

GEFÖRDERT VOM
Bundesministerium für Bildung und Forschung

Die Geschäftsstelle der Bundesweiten Mathematik-Wettbewerbe wird gefördert vom Bundesministerium für Bildung und Forschung.
Sie wird bei Bildung & Begabung gemeinnützige GmbH geführt.
www.bildung-und-begabung.de | Eingetragen beim Registergericht Amtsgericht Essen HRB 22445 | St.-Nr. 206/5887/1089
Geschäftsführung: PD Dr. Elke Völmicke, Heinz Rüdiger Grunewald

Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft

Aufgabe 3
Es seien a, b und c drei positive reelle Zahlen mit $a^2+b^2+c^2 \geq 3$. Man beweise, dass

$$\frac{(a+1)(b+2)}{(b+1)(b+5)} + \frac{(b+1)(c+2)}{(c+1)(c+5)} + \frac{(c+1)(a+2)}{(a+1)(a+5)} \geq \frac{3}{2}.$$

Lösung: Die Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+2}{(x+1)(x+5)}$ ist streng monoton fallend und konvex, denn die erste Ableitung

$$f'(x) = -\frac{x^2+4x+7}{(x+1)^2(x+5)^2}$$

ist negativ, und die zweite Ableitung

$$f''(x) = \frac{2(x^3+6x^2+21x+32)}{(x+1)^3(x+5)^3}$$

ist positiv. Die Ungleichung von Jensen liefert für das mit den Gewichten $a+1$, $b+1$, $c+1$ gewichtete Mittel der Argumente b, c, a:

$$\frac{(a+1)f(b)+(b+1)f(c)+(c+1)f(a)}{(a+1)+(b+1)+(c+1)} \geq f\left(\frac{(a+1)b+(b+1)c+(c+1)a}{(a+1)+(b+1)+(c+1)}\right)$$

Multipliziert man mit dem Nenner der linken Seite, erhält man

$$\frac{(a+1)(b+2)}{(b+1)(b+5)} + \frac{(b+1)(c+2)}{(c+1)(c+5)} + \frac{(c+1)(a+2)}{(a+1)(a+5)} \geq (a+b+c+3)\, f\left(\frac{(a+1)b+(b+1)c+(c+1)a}{a+b+c+3}\right) \qquad (*)$$

Nun ist

$$\begin{aligned} 2\big((a+1)b+(b+1)c+(c+1)a\big) &= (a+b+c+3)^2 - 4(a+b+c) - (a^2+b^2+c^2) - 9 \\ &\leq (a+b+c+3)^2 - 4(a+b+c+3) \end{aligned}$$

(im letzten Schritt wurde die Voraussetzung $a^2+b^2+c^2 \geq 3$ verwendet), also

$$\frac{(a+1)b+(b+1)c+(c+1)a}{a+b+c+3} \leq \frac{a+b+c-1}{2}.$$

Mit der Monotonie von f kann man die rechte Seite von $(*)$ also weiter abschätzen als

$$\geq (a+b+c+3)\, f\left(\frac{a+b+c-1}{2}\right)$$

Dieser Ausdruck hängt nur noch von $s = a+b+c$ ab:

$$= (s+3) \cdot \frac{\frac{s-1}{2}+2}{(\frac{s-1}{2}+1)(\frac{s-1}{2}+5)} = \frac{2(s+3)^2}{(s+1)(s+9)} = 2 - \frac{8}{10+s+\frac{9}{s}} \geq 2 - \frac{8}{10+6} = \frac{3}{2}$$

(im vorletzten Schritt wurde die Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel in der Form $s + \frac{9}{s} \geq 2\sqrt{s \cdot \frac{9}{s}} = 6$ angewendet).

Bemerkung: Diese Aufgabe wurde von keinem Teilnehmer gelöst. Die häufig behauptete Ungleichung

$$\frac{b+2}{b+5} + \frac{c+2}{c+5} + \frac{a+2}{a+5} \geq \frac{3}{2}$$

ist falsch, wie das aus Stetigkeitsgründen immer noch gültige Gegenbeispiel $a=2$, $b=c=0$ zeigt.