Auswahlwettbewerb zur Internationalen Mathematik- Olympiade

Lösungen zur 1. IMO-Auswahlklausur 2011

Aufgabe 1
Zwei Kreise Γ und Γ' mögen sich in den beiden voneinander verschiedenen Punkten A und B schneiden. Eine Gerade durch B schneide Γ und Γ' so in C bzw. D, dass B zwischen C und D liege. Eine weitere Gerade durch B schneide Γ und Γ' derart in E bzw. F, dass E zwischen B und F liege. Es möge sich ergeben, dass $|CD| = |EF|$ gilt. Das Innere der Strecke CF treffe Γ und Γ' ind P bzw. Q. Weiterhin seien M und N die Mittelpunkte der C bzw. F nicht enthaltenden Bögen PB bzw. BQ von Γ und Γ'. Man beweise, dass $CNMF$ ein Sehnenviereck ist.

Lösung: **(1)** Die Dreiecke ACD und AEF gleichsinnig kongruent: Wir arbeiten mit orientierten Winkeln modulo π. Es ist $\sphericalangle ADC = \sphericalangle ADB = \sphericalangle AFB = \sphericalangle AFE$ und $\sphericalangle DCA = \sphericalangle BCA = \sphericalangle BEA = \sphericalangle FEA$ (für das mittlere Gleichheitszeichen wurde beide Male der Satz vom Umfangswinkel benutzt). Da außerdem nach Voraussetzung $|CD| = |EF|$ gilt, folgt die Behauptung mit dem Kongruenzsatz wsw.
(2) A liegt auf derselben Seite der Geraden CD wie F: Der Überlappungsbereich der beiden Kreise enthält die Strecke BE und trifft die Gerade CD nur im Punkt B.
(3) Die Dreiecke CDQ und EFP sind gleichsinnig kongruent: Wie bei (1), $\sphericalangle QDC = \sphericalangle QDB = \sphericalangle QFB = \sphericalangle PFB$ usw.
(4) Es gibt eine Drehung um A, die die Punkte C, D, Q in die Punkte E, F, P überführt: folgt aus (1) und (3).
(5) A liegt auf derselben Seite der Geraden BF wie C: Aus (2) folgt, dass A und Q auf derselben Seite der Geraden CD liegen, und zusammen mit (4) ergibt sich, dass A und P auf derselben Seite der Geraden $EF = BF$ liegen, also auch A und C.
(6) BA ist die Winkelhalbierende des Innenwinkels des Dreiecks BFC bei B: Wegen (1) sind die Abstände von A zu den verlängerten Seiten gleich, und wegen (2) und (5) handelt es sich um eine innere Winkelhalbierende.
(7) CM ist die Winkelhalbierende des Innenwinkels des Dreiecks BFC bei C: Das folgt aus dem Umfangswinkelsatz.
(8) Analog ist FN ist die Winkelhalbierende des Innenwinkels des Dreiecks BFC bei F. Es sei I der Inkreismittelpunkt des Dreiecks BFC.
(9) M liegt auf dem C nicht enthaltenden Kreisbogen BA von Γ: Aus (2) und (5) folgt, dass die Punkte auf Γ die zyklische Reihenfolge B, E, A, C bzw. B, P, C (gleich orientiert) haben. Die orientierten Bögen EA und AC sind nach (4) gleich groß, also ist $\frac{1}{2}BC < BA$ und damit $BM = \frac{1}{2}BP < \frac{1}{2}BC < BA$.
(10) N liegt auf dem F nicht enthaltenden Kreisbogen AB von Γ': analog zu (9).
(11) I ist ein innerer Punkt von CM und FN: I liegt auf der Geraden AB, damit folgt die Behauptung aus (9) bzw. (10).
(12) I ist ein innerer Punkt von BA: folgt aus (9) oder (10).
(13) Es gilt $|CI| \cdot |IM| = |FI| \cdot |IN|$: Nach dem Sehnensatz in Γ ist $|CI| \cdot |IM| = |BI| \cdot |IA|$, nach dem Sehnensatz in Γ' ist $|BI| \cdot |IA| = |FI| \cdot |IN|$.
(14) Nach der Umkehrung des Sehnensatzes folgt mit (11) und (13), dass $CNMF$ ein Sehnenviereck ist.

Bemerkungen: Die Teilergebnisse (1) oder (3) wurden mit 3 Punkten, (7) oder (8) mit 1 Punkt honoriert.

Aufgabe 2
Es sei n eine positive ganze Zahl und b die größte ganze Zahl, die kleiner als $(\sqrt[3]{28} - 3)^{-n}$ ist. Man beweise, dass b nicht durch 6 teilbar sein kann.

Lösung: Die komplexe Zahl $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ist bekanntlich eine dritte Einheitswurzel und erfüllt $\omega^2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$, $\omega^3 = 1$ und $\omega^2 + \omega + 1 = 0$, insbesondere gilt

$$1 + \omega^j + \omega^{2j} = \begin{cases} 3, & \text{falls } j \text{ durch drei teilbar ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{1}$$

Setze $r_k = \sqrt[3]{28}\omega^k - 3$ für $k = 0, 1, 2$. Nach Definition von b ist $|r_0^{-n} - b| < 1$; da die Realteile von ω und ω^2 negativ sind, gilt $|r_1| > 1$ und $|r_2| > 1$. Damit ist

$$|b - (r_0^{-n} + r_1^{-n} + r_2^{-n})| < |b - r_0^{-n}| + |r_1^{-n}| + |r_2^{-n}| < 3. \tag{2}$$

Wegen $(\sqrt[3]{28}\omega^k)^3 = 28$ ist

$$r_k^{-1} = \frac{1}{\sqrt[3]{28}\omega^k - 3} = \frac{(\sqrt[3]{28}\omega^k)^3 - 3^3}{\sqrt[3]{28}\omega^k - 3} = \sqrt[3]{28}^2\omega^{2k} + 3\sqrt[3]{28}\omega^k + 9.$$

Erhebt man das Polynom $X^2 + 3X + 9$ in seine n-te Potenz, gibt es ganze Zahlen $c_0, \dots, c_{2n}$ mit $(X^2 + 3X + 9)^n = c_{2n}X^{2n} + c_{2n-1}X^{2n-1} + \dots + c_0$, hierbei ist $c_0 = 9^n$ ungerade. Durch Einsetzen $X = \sqrt[3]{28}\omega^k$ folgt $r_k^{-n} = \sum_{j=0}^{2n} c_j \sqrt[3]{28}^j \omega^{kj}$; daraus ergibt sich mit (1):

$$r_0^{-n} + r_1^{-n} + r_2^{-n} = \sum_{j=0}^{2n} c_j \sqrt[3]{28}^j (1 + \omega^j + \omega^{2j}) = 3 \sum_{0 \le \ell \le 2n/3} c_{3\ell} 28^\ell.$$

Die Summe ist offenbar ein Vielfaches von 3 und außerdem ungerade, da der Summand $c_{3\ell}28^\ell$ für $\ell = 0$ ungerade, für $\ell > 0$ gerade ist. Wäre b durch 6 teilbar, wäre der Betrag $|b - (r_0^{-n} + r_1^{-n} + r_2^{-n})|$ mindestens 3 im Widerspruch zu (2).

Bemerkungen: 1. Manche Teilnehmer versuchten, den Wert von $(\sqrt[3]{28} - 3)^{-1}$ und damit von b numerisch abzuschätzen. Das ist ein Irrweg, weil für alle reellen Zahlen m, M mit $1 < m < (\sqrt[3]{28} - 3)^{-1} < M$ eine positive ganze Zahl n existiert mit $M^n - m^n > 6$.
2. Manche dachten, zu $\sqrt[3]{28} - 3$ sei $-\sqrt[3]{28} - 3$ „konjugierte Zahl“. Das funktioniert so nur bei Quadratwurzeln, hier benötigt man $\omega\sqrt[3]{28} - 3$ und $\omega^2\sqrt[3]{28} - 3$.
3. Die Summen $s_n = r_0^{-n} + r_1^{-n} + r_2^{-n}$ genügen der linearen Rekursion $s_{t+3} = 27s_{t+2} + 9s_{t+1} + s_t$ für alle t, da aus $28 = (r_k + 3)^3$, also $1 = 27r_k + 9r_k^2 + r_k^3$ und $r_k^{-t-3} = 27r_k^{-t-2} + 9r_k^{-t-1} + r_k^{-t}$ die Rekursion durch Summation über $k = 0, 1, 2$ folgt.

Aufgabe 3

Es bezeichne $\mathbb{Q}^+$ die Menge der positiven rationalen Zahlen. Eine Funktion $f\colon \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ heiße *elastisch*, wenn für alle $x, y \in \mathbb{Q}^+$ die Ungleichung

$$f(x) + f(y) \ge 4f(x + y) \tag{$*$}$$

gilt.
(a) [5 Punkte] Man zeige: Ist $f\colon \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ elastisch und sind x, y, z positive rationale Zahlen, so ist $f(x) + f(y) + f(z) \ge 8f(x + y + z)$.
(b) [5 Punkte] Gibt es eine elastische Funktion $f\colon \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ zusammen mit positiven rationalen Zahlen x, y, z, für die $f(x) + f(y) + f(z) < 9f(x + y + z)$ der Fall ist?

Lösung: (a) Es gilt

$$4f(x) + f(y) + f(z) \overset{(*)}{\ge} 4(f(x) + f(y + z)) \overset{(*)}{\ge} 16f(x + y + z).$$

Addiert man dazu die zyklisch vertauschten Versionen $f(x) + 4f(y) + f(z) \ge \dots$ und $f(x) + f(y) + 4f(z) \ge \dots$, erhält man $6(f(x) + f(y) + f(z)) \ge 48f(x + y + z)$ und nach Division durch 6 die Behauptung.
(b) Ja, es gibt solche f, x, y, z. Betrachte die stückweise affin-lineare Funktion f mit den Knickpunkten $(2^k, 2^{-k})$ für $k \in \mathbb{Z}$, explizit: Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ sei f auf dem Intervall $[2^k, 2^{k+1}[$ definiert durch

$$f(x) = -\frac{x}{2^{2k+1}} + \frac{3}{2^{k+1}} \quad \text{für } 2^k \le x < 2^{k+1}.$$

Damit ist f für alle $x \in \mathbb{Q}^+$ definiert. Für alle x gilt $f(2x) = \frac{1}{2}f(x)$, damit wird $(*)$ äquivalent zur Konvexitätsungleichung $\frac{1}{2}(f(x) + f(y)) \ge f(\frac{x+y}{2})$. Die Funktion f ist konvex, also auch elastisch. Mit $x = y = z = 1$ gilt

$$f(x) + f(y) + f(z) = 3 < 9 \cdot \frac{3}{8} = 9f(x + y + z).$$

Bemerkung: Entgegen einer häufig geäußerten Behauptung sind elastische Funktionen nicht notwendigerweise monoton, Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}; & x \ne 1 \\ 2; & x = 1. \end{cases}$$