Auswahlwettbewerb zur Internationalen Mathematik- Olympiade

Lösungen zur 1. IMO-Auswahlklausur 2010

Aufgabe 1
Das Viereck $ABCD$ sei eine Raute mit spitzem Winkel bei A. Die Punkte M und N mögen so auf den Strecken AC und BC gelegen sein, dass $|DM| = |MN|$. Ferner sei P der Schnittpunkt von AC und DN sowie R der Schnittpunkt von AB und DM. Man beweise, dass $|RP| = |PD|$.

Anmerkung: Für $M = A$ und $N = B$ gilt $|DM| = |MN|$, aber $|RP| \neq |PD|$. Unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass M bzw. N im Inneren der Strecken AC bzw. BC liegen, ist die Behauptung jedoch korrekt. Den Fehler zu bemerken, zählte nicht als Lösung.

Lösung: Der Fall $N = B$ sei im Folgenden ausgeschlossen. Dann ist DN nicht orthogonal zu AC, und M ist eindeutig charakterisiert als Schnittpunkt der Mittelsenkrechte von DN mit AC. Im Dreieck DNC ist AC die Winkelhalbierende bei C, und in jedem Dreieck schneiden sich die Winkelhalbierende und die gegenüberliegende Mittelsenkrechte auf dem zugehörigen Umkreisbogen, also ist $DMNC$ ein Sehnenviereck, insbesondere ist $\sphericalangle MDN = \sphericalangle MCN$. Nun ist $\sphericalangle MDN = \sphericalangle RDP$ und $\sphericalangle MCN = \sphericalangle ACB = \sphericalangle BAC = \sphericalangle RAP$, also ist nach dem Satz vom Umfangswinkel auch $ARPD$ ein Sehnenviereck. In seinem Umkreis sind wegen $\sphericalangle RAP = \sphericalangle BAC = \sphericalangle CAD = \sphericalangle PAD$ die Sehnen RP und PD gleich lang (Sinussatz oder Umfangswinkel).

Bemerkungen: Diese Aufgabe erforderte eine genaue Analyse der relativen Lage der verschiedenen Punkte. Häufig war das angegebene Argument deshalb nur in bestimmten Fällen anwendbar, beispielsweise im Kontext des Sehnenfünfecks $MRBNP$ bzw. $MBRNP$. Die meisten Versuche, die Aufgabe durch Verwendung von Koordinaten rechnerisch zu lösen, scheiterten an Rechenfehlern. Relativ häufig wurde auch das Sehnenviereck $BNPM$ erkannt.

Aufgabe 2
Man beweise oder widerlege, dass für alle positiven reellen Zahlen a, b und c die Ungleichung

$$3 \leq \frac{4a+b}{a+4b} + \frac{4b+c}{b+4c} + \frac{4c+a}{c+4a} < \frac{33}{4}$$

gilt.

Beweis von $3 \leq \frac{4a+b}{a+4b} + \frac{4b+c}{b+4c} + \frac{4c+a}{c+4a}$*:*
1. Variante: Multiplizieren mit Hauptnenner und Vereinfachen führt zur äquivalenten Ungleichung $45abc \leq 7(a^2b + b^2c + c^2a) + 8(ab^2 + bc^2 + ca^2)$. Dies folgt aus der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel (z. B. $a^2b + b^2c + c^2a \geq 3\sqrt[3]{a^2b \cdot b^2c \cdot c^2a} = 3abc$).
2. Variante: Für $n \geq 1$ und reelle Zahlen $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ gilt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung $\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + \ldots + b_n^2} \geq a_1b_1 + \ldots + a_nb_n$. Für $n = 3$, $a_1^2 = \frac{4a+b}{a+4b}$, $a_2^2 = \frac{4b+c}{b+4c}$, $a_3^2 = \frac{4c+a}{c+4a}$, $b_1^2 = (4a+b)(a+4b)$, $b_2^2 = (4b+c)(b+4c)$, $b_3^2 = (4c+a)(c+4a)$ ergibt sich

$$\left(\frac{4a+b}{a+4b} + \frac{4b+c}{b+4c} + \frac{4c+a}{c+4a}\right)\Big((4a+b)(a+4b) + (4b+c)(b+4c) + (4c+a)(c+4a)\Big) \geq (5(a+b+c))^2.$$

Der zweite Faktor ist wegen $2(a+b+c)^2 - 6(ab+bc+ca) = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$ kleiner als $\frac{25}{3}(a+b+c)^2$, woraus die Behauptung folgt.
Beweis von $\frac{4a+b}{a+4b} + \frac{4b+c}{b+4c} + \frac{4c+a}{c+4a} < \frac{33}{4}$*:*
1. Variante: Multiplizieren mit Hauptnenner und Vereinfachen liefert die äquivalente (triviale) Ungleichung $0 < 127abc + 16(a^2b + b^2c + c^2a)$.

2. Variante: Die Ungleichung ist äquivalent zu $\frac{b}{a+4b} + \frac{c}{b+4c} + \frac{a}{c+4a} > \frac{1}{4}$; Letzteres gilt wegen

$$\frac{b}{a+4b} + \frac{c}{b+4c} + \frac{a}{c+4a} > \frac{b}{4a+4b+4c} + \frac{c}{4a+4b+4c} + \frac{a}{4a+4b+4c} = \frac{1}{4}.$$

Bemerkungen: 1. Die Ungleichung geht zwar bei zyklischer Vertauschung a nach b, b nach c, c nach a in sich über, nicht aber bei beliebigem Permutatieren von a, b, c. Daher kann man zwar ohne Einschränkung $a \geq b$ und $a \geq c$ voraussetzen, nicht jedoch $a \geq b \geq c$. Viele Lösungsansätze funktionierten nur unter letzterer Voraussetzung.
2. Manche Teilnehmer untersuchten den Grenzwert für $a \to \infty$ bei festem b und c und schätzten dann $\frac{4b+c}{b+4c}$ ab. Das ist kein Beweis für die rechte Ungleichung, da die Summe für endliche Werte von a größer als für $a \to \infty$ sein kann.
3. Die Zahl $\frac{33}{4}$ wird für $a = 1$, $b = \varepsilon$, $c = \varepsilon^2$ für $\varepsilon \to 0$ beliebig angenähert.

Aufgabe 3
Man bestimme alle Paare (m, n) nicht-negativer ganzer Zahlen, die der Gleichung

$$3^m - 7^n = 2$$

genügen.

Lösung: Die Paare $(1, 0)$ und $(2, 1)$ sind Lösungen. Es sei (m, n) eine Lösung mit $m, n \geq 2$. Die Lösung besteht aus drei Schritten:
1. Es ist $7^n \equiv -2 \mod 9 \iff n \equiv 1 \mod 3$.
2. Es ist $3^m \equiv 2 \mod 49 \iff m \equiv 26 \mod 42$.
3. Die Bedingungen aus 1 und 2 ergeben einen Widerspruch modulo 43.
Schritt 1: Es gilt $7^1 \equiv 7$, $7^2 \equiv 4$ und $7^3 \equiv 1 \mod 9$, ab dann sind die Reste periodisch mit Periode 3. Aus der Ausgangsgleichung folgt $7^n \equiv 7 \mod 9$, also $n \equiv 1 \mod 3$.
Schritt 2: Zeige zunächst $m \equiv 2 \mod 6$ analog zu Schritt 1. Nach dem Satz von Euler-Fermat ist $3^{42} \equiv 1 \mod 49$, die Periode ist also höchstens 42. Unter Verwendung von $3^6 \equiv -6 \mod 49$ erhält man:

m	2	8	14	20	26	32	38
3^m mod 49	9	44	30	16	2	37	23

Es gilt also $3^m \equiv 2 \mod 49$ genau dann, wenn $m \equiv 26 \mod 42$.
Schritt 3: Schreibe $m = 42m' + 26$ und $n = 3n' + 1$. Betrachtet man nun die ursprüngliche Gleichung modulo 43, erhält man mit dem kleinen Satz von Fermat und $7^3 \equiv -1 \mod 43$

$$3^{42m'+26} - 7^{3n'+1} \equiv 3^{26} - (-1)^{n'} \cdot 7 \equiv 15 - (-1)^{n'} \cdot 7 \not\equiv 2 \mod 43.$$

Es gibt also keine weiteren Lösungen.

Bemerkungen: Diese Aufgabe wurde von keinem Teilnehmer gelöst. Eine häufige Lücke in den Ansätzen war die folgende: Aus $a^b \equiv a^c \mod M$ folgt nicht $b \equiv c \mod \varphi(M)$, wie das für die Aufgabe relevante Beispiel $a = 7, b = 4, c = 1, M = 9$ zeigt.
Aufgrund der Periodizität der Potenzreste ist es nicht möglich, direkt aus $3^m - 7^n = 2$ einen Widerspruch modulo 43 oder einer anderen Primzahl $\neq 3, 7$ herzuleiten, denn die Gleichung besitzt ja Lösungen. Erst mit zusätzlichen, mit Hilfe der Primzahlen 3 und 7 gewonnenen Einschränkungen erhält man den gewünschten Widerspruch.