Lösungen zur 1. IMO-Auswahlklausur 2009

Aufgabe 1
Es sei $p > 7$ eine Primzahl, die bei Division durch 6 den Rest 1 lässt. Setze $m = 2^p - 1$. Man beweise, dass $2^{m-1} - 1$ ohne Rest durch $127m$ teilbar ist.

Lösung: Die Lösung besteht aus drei Schritten:
1. $2^{m-1} - 1$ ist durch 127 teilbar.
2. $2^{m-1} - 1$ ist durch m teilbar.
3. 127 und m sind teilerfremd.

Zu 1: Es gilt $2^6 \equiv 1 \bmod 7$. Aus $p \equiv 1 \bmod 6$ folgt $2^p \equiv 2 \bmod 7$, also $7 \mid m - 1$. Mit $2^7 \equiv 1 \bmod 127$ folgt daraus $2^{m-1} \equiv 1 \bmod 127$.
Zu 2: Es gilt $2^p \equiv 2 \bmod p$ (kleiner Satz von Fermat), d. h. $p \mid m-1$. Aus $2^p \equiv 1 \bmod m$ folgt damit $2^{m-1} \equiv 1 \bmod m$.
Zu 3: Es gilt $2^p \equiv 1 \bmod 127$ genau dann, wenn p durch 7 teilbar ist (schreibe $p = 7k+r$ mit $0 \le r < 7$ und verwende $2^7 \equiv 1 \bmod 127$). Wegen $p > 7$ ist das nicht der Fall, also ist m nicht durch 127 teilbar, und da 127 eine Primzahl ist, sind 127 und m teilerfremd.

Bemerkungen: Die Beziehung $\mathrm{ggT}(2^a-1, 2^b-1) = 2^{\mathrm{ggT}(a,b)}-1$ erlaubt eine Verkürzung der Lösung. Statt Kongruenzrechnung kann teilweise auch die Teilbarkeitsaussage $a - b \mid a^n - b^n$ verwendet werden. Einige Teilnehmer verwendeten eine fehlerhafte Fassung des Satzes von Euler-Fermat: er lautet $a^{\phi(m)} \equiv 1 \bmod m$ für $\mathrm{ggT}(a, m) = 1$, doch nur für m Primzahl gilt $\phi(m) = m - 1$.

Aufgabe 2
Das Dreieck ABC sei bei A rechtwinklig. Es bezeichne M den Mittelpunkt der Strecke BC. Der Punkt D liege auf der Seite AC und erfülle $\overline{AD} = \overline{AM}$. Der von C verschiedene Schnittpunkt der Umkreise der Dreiecke AMC und BDC heiße P. Man beweise, dass CP den bei C gelegenen Winkel des Dreiecks ABC halbiert.

Lösung 1: Der Winkel $\sphericalangle PDC$ ist einerseits Nebenwinkel von $\sphericalangle ADP$, andererseits liegt er im Sehnenviereck $BPDC$ dem Winkel $\sphericalangle CBP$ gegenüber. Folglich $\sphericalangle ADP = \sphericalangle CBP$. Analog ist der Winkel $\sphericalangle CMP$ Nebenwinkel von $\sphericalangle PMB$ und liegt im Sehnenviereck $APMC$ dem Winkel $\sphericalangle PAC$ gegenüber, also $\sphericalangle PMB = \sphericalangle PAC$. Die Dreiecke PBM und PDA stimmen somit in den Innenwinkeln bei B und D sowie bei M und A überein, außerdem ist nach Voraussetzung $\overline{AD} = \overline{AM} = \overline{MB}$ (die letzte Gleichheit ergibt sich aus dem Satz des Thales). Nach dem Kongruenzsatz wsw sind die Dreicke PBM und PDA kongruent, insbesondere sind ihre von P ausgehenden Höhen gleich lang. Sie sind aber die Lote von P auf die Dreiecksseiten CA bzw. CB, also liegt P auf der Winkelhalbierenden.
Lösung 2 (Skizze, nach M. Krebs): Bezeichne mit m_{XY} die Mittelsenkrechte der Strecke XY. Dann sind sowohl m_{CD} und m_{CA} also auch m_{CM} und m_{CB} Paare paralleler Geraden im Abstand $\frac{1}{4}\overline{BC}$, also begrenzen sie eine Raute. Die Mittelpunkte M_1, M_2 der beiden in der Aufgabe genannten Umkreise sind die Schnittpunkte von m_{CA} mit m_{CM} bzw. von m_{CD} mit m_{CB}. Die Gerade (CP) steht senkrecht auf der Verbindungsgeraden (M_1M_2), ist also parallel zur zweiten Diagonalen in der Raute. Man überlegt sich nun leicht, dass die zweite Diagonale parallel zur Winkelhalbierenden ist.

Aufgabe 3
Auf einer Tafel stehe am Anfang eine positive ganze Zahl. Wenn eine Zahl x auf der Tafel steht, darf man die Zahlen $2x+1$ und $\frac{x}{x+2}$ dazuschreiben. Irgendwann stehe auch die Zahl 2008 auf der Tafel. Man beweise, dass sie von Anfang an dastand.

Lösungsskizze: Anfangs stehe die Zahl a auf der Tafel. Der Übergang von x zu $2x+1$ oder $\frac{x}{x+2}$ werde als *Transformation* bezeichnet. Alle Zahlen auf der Tafel sind positiv.
1. Variante: Aus der Zahl a entstehen durch k Transformationen stets Zahlen der Form $\frac{ma+m-1}{(2^k-m)a+2^k-m+1}$ mit ganzzahligem $0 < m \leq 2^k$ (Beweis durch vollständige Induktion nach k). Steht also irgendwann 2008 an der Tafel, gibt es somit $k \geq 0$ und $0 < m \leq 2^k$ mit $\frac{ma+m-1}{(2^k-m)a+2^k-m+1} = 2008$ bzw. $2009 = (a+1)(2009m - 2008 \cdot 2^k)$. Da der zweite Faktor teilerfremd zu 2009 ist (da 2008 und 2^k teilerfremd zu 2009), folgt $a+1 = 2009$.
2. Variante: Schreibe auf ein Blatt Papier zu jeder Zahl t der Tafel die Zahl $f(t) = \frac{2009}{t+1}$. Irgendwann steht 1 auf dem Blatt. Eine Transformation einer Zahl auf der Tafel bildet eine Zahl z auf dem Blatt auf $z/2$ oder $\frac{2009+z}{2}$ ab. Ist also die Anfangszahl $f(a)$ auf dem Blatt nicht ganzzahlig oder nicht teilerfremd zu 2009, können daraus nicht irgendwann ganzzahlige oder zu 2009 teilerfremde Zahlen entstehen. Somit ist $f(a)$ ganzzahlig und teilerfremd zu 2009. Da $f(a) = \frac{2009}{a+1}$ zudem 2009 teilt, folgt $f(a) = 1$ und $a = 2008$.
3. Variante: Jede Transformation bildet die gekürzte rationale Zahl p/q auf die gekürzte Zahl p'/q' ab, wobei p, q, p', q' positive ganze Zahlen sind und $p'+q' \in \{p+q, 2(p+q)\}$. Anfangs hat man die gekürzte Darstellung $\frac{a}{1}$, am Ende $\frac{2008}{1}$, es gibt also $k \geq 0$ mit $2^k(a+1) = 2008+1$. Da 2009 ungerade ist, folgt $k = 0$ und $a+1 = 2009$.
4. Variante: Bilde die Zahlenfolge $a_0 = a, a_1, \ldots, a_k = 2008$ aus Zahlen auf der Tafel, wobei a_{j+1} für $0 \leq j < k$ durch eine der beiden Transformationen aus a_j entsteht. Aus a_k lassen sich $a_{k-1}, \ldots, a_0$ eindeutig rekonstruieren, da für alle $x > 0$ gilt: $2x+1 > 1$, $0 < \frac{x}{x+2} < 1$. Mit Induktion nach n für $n = 0, \ldots, k$ zeigt man, dass $a_{k-n} = \frac{2009-b_n}{b_n}$ mit $0 < b_n < 2009$ und $b_n \equiv 2^n \mod 2009$. Damit ist a_{k-n} ganzzahlig (mit Wert 2008) genau dann, wenn $2^n \equiv 1 \mod 2009$ bzw. wenn $420|n$.

Bemerkungen: Einige Teilnehmer betrachteten nur spezielle Abfolgen der beiden Transformationen oder versuchten (fehlerhaft) zu beweisen, dass in der 4. Variante die Zahl a_{k-n} nur für $n = 0$ ganzzahlig sein kann. 2009 ist keine Primzahl: $2009 = 7^2 \cdot 41$.