Lösungen zur 1. IMO-Auswahlklausur 2008

Aufgabe 1
Man zeige, dass es in der Dezimaldarstellung von $\sqrt[3]{3}$ zwischen der 1000000. und 3141592. Nachkommastelle eine von 2 verschiedene Ziffer gibt.

Lösung: Hätte $\sqrt[3]{3}$ zwischen der 1000000. und 3141592. Nachkommastelle nur die Ziffer 2, wäre mit $a = [10^{1000000}\sqrt[3]{3}] < 10^{1000001}$ also $|\sqrt[3]{3} - (a+2/9)10^{-1000000}| < 10^{-3141592}$ oder äquivalent

$$|\sqrt[3]{3(9 \cdot 10^{1000000})^3} - (9a+2)| < 9 \cdot 10^{-2141592}. \tag{1}$$

Nun ist sicher $(9a+2)^3 \neq 3(9 \cdot 10^{1000000})^3$, da die rechte Seite den Primfaktor 3 in nicht durch 3 teilbarer Vielfachheit enthält. Allgemein gilt für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \neq n^3$:

$$\left|\sqrt[3]{m} - n\right| \geq \frac{|m-n^3|}{\sqrt[3]{m}^2 + \sqrt[3]{m}n + n^2} \geq \frac{1}{3 \cdot (\max(\sqrt[3]{m}, n))^2.}$$

Daraus folgt aber — im Widerspruch zu (1):

$$|\sqrt[3]{3(9 \cdot 10^{1000000})^3} - (9a+2)| > \frac{1}{3(10^{1000001})^2} > 10^{-2000003}. \qquad \square$$

Bemerkungen:

1. Man konnte als bekannt voraussetzen, dass $\sqrt[3]{3}$ irrational ist.
2. Viele Teilnehmer haben versucht, ziffernweise zu argumentieren, dass die Ziffern von $\sqrt[3]{3}$ nach Erheben in die dritte Potenz nicht alle Null sein können, indem man $\sqrt[3]{3}$ in der Dezimaldarstellung als eine Potenzreihe $\sqrt[3]{3} = 1 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ mit $a_1, a_2, \ldots \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ und $x = 1/10$ betrachtet hat. Hier kann man leicht Überträge übersehen: Tatsächlich ist nämlich $\sqrt[3]{3} = 1,442...$, und $(1 + 4x + 4x^2 + 2x^3 + \ldots)^3 = 1 + 12x + 60x^2 + 166x^3 + \ldots$.
3. Manche Teilnehmer haben die binomischen Reihe $(1+x)^{1/3} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/3}{k} x^k$ mit $\binom{1/3}{k} = \frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{3} - 1)(\frac{1}{3} - 2) \cdots (\frac{1}{3} - k + 1)/k!$ für $k \in \mathbb{N}_0$, die für $|x| \leq 1$ konvergiert, an der Stelle $x = 2$ betrachtet — hier konvergiert die Reihe nicht.

Aufgabe 2
Es sei $ABCD$ ein gleichschenkliges Trapez mit $AB \| CD$ und $\overline{BC} = \overline{AD}$. Die Parallele zu AD durch B treffe die Senkrechte zu AD durch D im Punkt X. Ferner treffe die durch A gezogene Parallele zu BD die Senkrechte zu BD durch D im Punkt Y. Man beweise, dass die Punkte C, X, D und Y auf einem gemeinsamen Kreis liegen.

Erste Lösung. Es sei M der Mittelpunkt der Strecke AB. Die durch M gezogene Parallele zu DY treffe BD in G und die durch A gezogene Parallele zu BD in H. Aus $\overline{AM} = \overline{MB}$ schließt man leicht $\overline{HM} = \overline{MG}$, und da $DY \perp DB$ vorausgesetzt ist, ist das Viereck $DGHY$ ein Rechteck. Beides zusammen lehrt $\overline{DM} = \overline{MY}$, und in gleicher

Weise zeigt man $\overline{DM} = \overline{MX}$. Da das Trapez $ABCD$ gleichschenklig ist, gilt ferner $\overline{DM} = \overline{MC}$, und aus der Kombination der drei letzten Gleichungen ergibt sich sofort, daß die vier Punkte C, D, X, Y auf einem gemeinsamen Kreis um M liegen. $\square$

Zweite Lösung. Man ergänze das Dreieck DAB zu einem Parallelogramm $DAZB$. Nach Konstruktion von X und Y liegen diese beiden Punkte auf ZB bzw. ZA, und es gilt $\sphericalangle DXZ = \sphericalangle ZYD = 90°$. Der Satz des THALES liefert nunmehr, daß X und Y auf dem Kreis mit Durchmesser DZ liegen. Der Mittelpunkt dieses Kreises ist gleichzeitig der Mittelpunkt der Strecke DZ und, da sich in Parallelogrammen die Diagonalen gegenseitig halbieren, fällt dieser mit dem Mittelpunkt der Strecke AB zusammen. Nachdem nun das Trapez $ABCD$ als gleichschenklig vorausgesetzt ist, gilt folglich $\overline{DM} = \overline{MC}$, womit gezeigt ist, daß auch der Punkt C auf dem vorhin betrachteten Kreis liegt. $\square$

Dritte Lösung (skizziert, nach einer Idee von ANDREAS GROSS*).* Es sei $F = (ABD)$ der Flächeninhalt des Dreiecks ABD. Wir ziehen um D einen Kreis ω mit Radius $\sqrt{2F}$ und invertieren an diesem. Kundige können sich leicht überlegen, daß $\overline{DX'} = \overline{DA}$ sowie $\overline{DY'} = \overline{DB}$ gilt und daß hieraus $(DX'Y') = F$ folgt. Es sei nun C^* der Schnittpunkt der Geraden DC und $X'Y'$ sowie H der Fußpunkt des aus D auf AB gefällten Lotes. Nun haben die Punkte X', Y' von der Geraden CD die Abstände $\overline{AH}$, $\overline{BH}$, und hieraus ergibt sich $(DX'Y') = (DC^*Y') - (DC^*X') = \frac{1}{2}\overline{DC^*} \cdot (\overline{HB} - \overline{AH}) = \frac{1}{2}\overline{DC^*} \cdot \overline{DC}$. Im Zusammenhang mit einer bereits angegebenen Gleichung folgt hieraus $\overline{DC^*} \cdot \overline{DC} = 2F$, woraus sich mit Hilfe einer kleinen Lagebetrachtung $C^* = C'$ ergibt. Demnach liegen die drei Punkte C', X', Y' auf einer gemeinsamen Geraden, und von dieser überzeugt man sich leicht, daß sie nicht durch D gehen kann. Dies impliziert die Behauptung. $\square$

Aufgabe 3
Man zeige, dass es eine ganze Zahl a gibt, für die $a^3 - 36a^2 + 51a - 97$ ein Vielfaches von 3^{2008} ist.

1. Lösung: Definiere das Polynom $P(x) = x^3 - 36x^2 + 51x - 97$. Ausgehend von $P_0(x) = \frac{1}{81}P(9x+1) = 9x^3 - 33x^2 - 2x - 1$, definiere rekursiv Polynome $P_k(x) = 3a_kx^3 + 3b_kx^2 + c_kx + d_k$ mit ganzen Zahlen a_k, b_k, c_k, d_k, wobei c_k nicht durch 3 teilbar ist, und $P_{k+1}(x) = \frac{1}{3}P_k(3x + \varepsilon_k)$ mit $\varepsilon_k \in \{-1, 0, 1\}$ für alle k: Da c_k nicht durch 3 teilbar ist, kann man ε_k so wählen, dass $\varepsilon_k c_k + d_k$ durch 3 teilbar ist; dann ist $\frac{1}{3}P_k(3x + \varepsilon_k) = 3a_{k+1}x^3 + 3b_{k+1}x^2 + c_{k+1} + d_{k+1}$ mit $a_{k+1} = 9a_k$, $b_{k+1} = 9\varepsilon_k a_k + 3b_k$, $c_{k+1} = 3(3\varepsilon_k^2 a_k + 2\varepsilon_k b_k) + c_k$, $d_{k+1} = \varepsilon_k^3 a_k + \varepsilon_k^2 b_k + (\varepsilon_k c_k + d_k)/3$, somit ist auch c_{k+1} nicht durch 3 teilbar.
Setzt man $x_{2004} = 0$ und rekursiv $x_k = 3x_{k+1} + \varepsilon_k$, also $P_k(x_k) = 3P_k(x_{k+1})$ für $k = 2003, \ldots, 0$, so ist für $a = 9x_0 + 1$ die Zahl $P(a) = 81 \cdot 3^{2004}P_{2004}(x_{2004})$ ein Vielfaches von 3^{2008}. $\square$

2. Lösung: Definiere das Polynom $P(x) = x^3 - 36x^2 + 51x - 97$. Für $k \geq 4$ werden induktiv ganze Zahlen a_k mit $a_k \equiv 1 \bmod 9$ und $3^k | P(a_k)$ konstruiert; die Aufgabenstellung erfüllt dann $a = a_{2008}$:
Verankerung $k = 4$: Für $a_4 = 1$ ist $3^4 | P(a_4)$.
Induktionsschritt $k \to k+1$: Für $k \geq 4$ ist $2k - 3 \geq k + 1$ und $3k - 6 > k + 1$, also für

alle ganzzahligen x:

$$\begin{aligned} P(x+3^{k-2})-P(x) &\equiv 3^{k-1}x^2+3^{2k-3}x+3^{3k-6}-36(2\cdot 3^{k-2}x+3^{2k-4})+51\cdot 3^{k-2} \\ &\equiv 3^{k-1}(x^2-24x+17) \bmod 3^{k+1}. \end{aligned}$$

Für $x \equiv 1 \bmod 9$ ist $x^2-24x+17 \equiv 1-24+17 \equiv 3 \bmod 9$. Wegen $k \geq 4$ ist auch $x \equiv x+3^{k-2} \bmod 9$. Daher enthält die Differenz $3^{k-1}(x^2-24x+17)$ den Primfaktor 3 genau k-mal, also ist $P(u)$ für $u=a_k$ oder $u=a_k+3^{k-2}$ oder $u=a_k+2\cdot 3^{k-2}$ durch 3^{k+1} teilbar, setze a_{k+1} auf diesen Wert von u. Nach Konstruktion ist $a_{k+1} \equiv 1 \bmod 9$. $\square$

Bemerkungen:

1. Manche Teilnehmer versuchten, mittels Schubfachprinzip zu argumentieren: Wäre $P(m) \not\equiv P(n) \bmod 3^{2008}$ für $m \not\equiv n \bmod 3^{2008}$, gäbe es zwangsläufig auch ein a mit $P(a) \equiv 0 \bmod 3^{2008}$. Die zweite Lösung zeigt aber, dass $P(x+3^{2006}) \equiv P(x) \bmod 3^{2008}$.

2. Ist P ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten und p eine Primzahl, hat die Gleichung $P(a) \equiv 0 \bmod p^m$ eine Lösung für alle $m \geq 0$, wenn es ein u mit $P(u) \equiv 0 \bmod p$ und $P'(u) \not\equiv 0 \bmod p$ gibt (Hensel-Lemma, siehe E. J. Barbeau, Polynomials, Springer-Verlag New York 1989, Seite 100), hierbei ist für ein Polynom $P(x)=b_nx^n+\ldots b_0$ die Ableitung $P'(x)=nb_nx^{n-1}+\ldots+b_1$. Für $P(x)=x^3-36x^2+51x-97$ ist jedoch $3|P'(a)$ für alle a, so dass das Hensel-Lemma hier nicht anwendbar ist. Es führt jedoch für $Q(x)=P(3x+1)/27=x^3-11x^2-2x-3$ an der Stelle $u=0$ zum Ziel.

3. Die Aufgabe ist nicht für alle Polynome lösbar: es gibt zwar ganze Zahlen a mit $3|1+a+a^2$, aber keine ganze Zahl mit $9|1+a+a^2$.

4. Die ersten Werte für die Zahlen ε_k in der ersten Lösung lauten 1, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 1, 1, 1, -1, -1, 0, -1, 1, -1, -1, 0, 1 — es ist also keine (offensichtliche) Regelmäßigkeit erkennbar.