Auswahlwettbewerb zur Internationalen Mathematik-Olympiade

Lösungen zur 1. IMO-Auswahlklausur 2007

1. Aufgabe

Es seien n eine positive ganze Zahl größer als Eins und $B = \{1, 2, \ldots, 2^n\}$. Eine Teilmenge A von B heiße ulkig, wenn sie von je zwei verschiedenen Elementen x, y von B, deren Summe eine Zweierpotenz ist, genau eines enthält. Wie viele ulkige Teilmengen hat B?

Lösung. Die Anzahl ist 2^{n+1}. Wir argumentieren mit vollständiger Induktion nach n und setzen hierzu $B_n = \{1, 2, \ldots, 2^n\}$.
Induktionsanfang, $n = 1$. Dieser Fall ist klar: alle vier Teilmengen von $B_1 = \{1, 2\}$ sind ulkig.
Induktionsschritt, $n \longrightarrow n + 1$. Es sei also bereits bekannt, daß B_n genau 2^{n+1} viele ulkige Teilmengen hat. Für jede ulkige Menge A von B_n konstruiere die Mengen $C_n(A) = \{2^{n+1} - m \mid m \in B_n \setminus A, m < 2^n\}$, $M_n(A) = A \cup C_n(A)$ und $N_n(A) = M_n(A) \cup \{2^{n+1}\}$. Offenbar sind A, $C_n(A)$ und $\{2^{n+1}\}$ paarweise elementfremd. Die Mengen $M_n(A)$ und $N_n(A)$ sind ulkig: Hierzu seien x, y verschiedene Elemente von B_{n+1}, deren Summe eine Zweierpotenz ist; ohne Einschränkung gelte $x < y$. Im Fall $1 \leq x < y \leq 2^n$, also $x, y \in B_n$, ist genau eines von beiden in $M_n(A)$ bzw. $N_n(A)$ enthalten, da A ulkig ist. Im Fall $1 \leq x \leq 2^n < y \leq 2^{n+1}$ ist $2^n < x + y < 2^{n+2}$, also $x + y = 2^{n+1}$; wegen $x \geq 1$ ist $y \neq 2^{n+1}$. Nach Wahl von $C_n(A)$ liegt entweder x in A oder y in $C_n(A)$. Der Fall $2^n < x < y \leq 2^{n+1}$ kann nicht auftreten, da dann $2^{n+1} < x + y < 2^{n+2}$. — Ist andererseits M ulkige Teilmenge von B_{n+1}, so ist offenbar $A := M \cap B_n$ ulkige Teilmenge von B_n. Das Element $y = 2^{n+1} - x$ von B_{n+1} mit $1 \leq x < 2^n$ ist genau dann in M enthalten, wenn $x \in B_n$ nicht in A enthalten ist, da $x + y = 2^{n+1}$ Zweierpotenz ist. Die Ulkigkeit von M legt also bei Kenntnis von $M \cap B_n$ für alle Elemente y von B_{n+1} mit $2^n < y < 2^{n+1}$ fest, ob sie in M enthalten sind; es steht nur noch frei, ob 2^{n+1} Element ist. Damit gleicht M entweder $M_n(A)$ oder $N_n(A)$, und es lassen sich jeder ulkigen Teilmenge von B_n genau zwei ulkige Teilmengen von B_{n+1} zuordnen. Das beendet den Beweis.

Bemerkung. Oft wurde irrtümlich angenommen, die Zahlen 2^{n-1} und 2^n könnten gar nicht Elemente einer ulkigen Teilmenge von B_n sein, da für kein $x \in B_n$ mit $x \neq 2^{n-1}$ die Zahl $2^{n-1} + x$ eine Zweierpotenz ist und das gleiche Phänomen bei 2^n auftritt. Diese Sachlage zeigt allerdings nur, daß für jedes $X \subseteq B_n - \{2^{n-1}, 2^n\}$ die vier Mengen $X, X \cup \{2^{n-1}\}, X \cup \{2^n\}, X \cup \{2^{n-1}, 2^n\}$ entweder gleichzeitig ulkige oder gleichzeitig unulkige Teilmengen von B_n sind.

2. Aufgabe

Man finde alle Quadrupel positiver ganzer Zahlen (m, n, p, q) mit der Eigenschaft

$$p^m q^n = (p + q)^2 + 1.$$

1. Lösung. Hilfssatz: Sind k, l, a positive ganze Zahlen mit $a = (k^2 + l^2 + 1)/(kl)$, folgt $a = 3$.
Beweis des Hilfssatzes: Zu gegebenem Wert von a betrachten wir ein Paar (k, l) mit $k^2 + l^2 + 1 = akl$ und minimaler Summe $k + l$ unter allen derartigen Paaren. Ohne Einschränkung ist $k \leq l$.
Zunächst sei $k < l$. Nach Voraussetzung genügt k der quadratischen Gleichung

$$x^2 + l^2 + 1 - axl = 0, \tag{1}$$

für deren 2. Lösung k' nach Satz von Vieta folgt: $k + k' = al$ und $kk' = l^2 + 1$. Also ist $k' = al - k$ ganzzahlig, wegen $k' = (l^2 + 1)/k$ positiv, wegen $k \geq l + 1$ und $kk' = l^2 + 1 < (l + 1)^2$ ist $k' \leq l$, also ist (l, k') Paar mit kleinerer Summe $l + k' < k + l$ entgegen der Wahl von (k, l).
Somit gilt $k = l$, also $k^2(a - 2) = 1$, woraus sich $k = 1$ und $a = 3$ ergeben. □
Es ist wegen $m \geq 1$ und $n \geq 1$ der Ausdruck $p^{m-1}q^{n-1} = (p^2 + q^2 + 1)/(pq) + 2$ ganzzahlig, also nach Hilfssatz $p^{m-1}q^{n-1} = 5$ und somit $p^{m-1} = 1, q^{n-1} = 5$ oder $p^{m-1} = 5, q^{n-1} = 1$. Im ersten Fall ist $n = 2$ und $q = 5$; p genügt der Gleichung (1) für $l = 5, a = 3$ mit Lösungen 2 und 13, aus $p^{m-1} = 1$ folgt jeweils $m = 1$, und durch Einsetzen bestätigt man die Lösungsquadrupel $(1, 2, 2, 5)$ und $(1, 2, 13, 5)$. Der zweite Fall liefert entsprechend $(2, 1, 5, 2)$ und $(2, 1, 5, 13)$.

2. Lösung. Alle Summanden der Ausgangsgleichung bis auf $q^2 + 1$ sind Vielfache von p, daher gilt $p | q^2 + 1$. Damit lassen sich die Fälle $q = 1, 2, \ldots, 6$ mittels Durchprobieren behandeln, man erhält Lösungsquadrupel aus 1. Lösung. Für $p \geq q \geq 7$ (analog: $p \geq p \geq 7$) gibt es keine Lösungen:

1. Fall: $m > 1$: Dann ist $p^m q^n \geq p^2 q > 6p^2 \geq (p+q)^2 + 1$.
2. Fall: $n > 2$: Dann ist wegen $p \leq q^2 + 1$: $p^m q^n \geq pq^3 \geq p^2 q - pq > 5p^2 > (p+q)^2 + 1$.
3. Fall: $m = n = 1$: Hierzu müsste $p^2 + pq + q^2 + 1 = 0$ sein — unmöglich für $p > 0, q > 0$.
4. Fall: $m = 1, n = 2$: Die quadratische Gleichung $pq^2 = (p+q)^2 + 1$ für p hat Diskriminante $D = q^4 - 4q^3 - 4$, die für $q \geq 7$ zwischen den aufeinander folgenden Quadratzahlen $(q^2 - 2q - 3)^2$ und $(q^2 - 2q - 2)^2$ liegt, also ist $\sqrt{D}$, somit auch p nicht ganzzahlig.

Bemerkung: Es gab Trugschlüsse: z. B. sind Fälle $m \geq 2, n \geq 3$ und $m \geq 3, n \geq 2$ behandelt, folgt nicht notwendig $m \leq 2$ und $n \leq 2$; sind p, q teilerfremd, haben p und q nicht notwendig unterschiedliche Parität. Manchmal wurden nicht alle Lösungen auf Grund zu starker Einschränkungen gefunden (z. B. Voraussetzung $m \geq n$ und $p \geq q$).

3. Aufgabe

Der Punkt P liege im Inneren des Dreiecks ABC und erfülle

$$\sphericalangle BPC - \sphericalangle BAC = \sphericalangle CPA - \sphericalangle CBA = \sphericalangle APB - \sphericalangle ACB.$$

Man beweise, dass dann gilt:

$$\overline{PA} \cdot \overline{BC} = \overline{PB} \cdot \overline{AC} = \overline{PC} \cdot \overline{AB}.$$

Zunächst überlegt man sich, daß $\sphericalangle BPC = 60° + \alpha$, $\sphericalangle CPA = 60° + \beta$, $\sphericalangle APB = 60° + \gamma$. Aus Symmetriegründen genügt es, eine der beiden behaupteten Gleichungen zu zeigen. (Hinweis: Für einen Winkel $\sphericalangle XYZ$ mit $0° < \sphericalangle XYZ < 180°$ im mathematisch positiven Sinn setze $\sphericalangle ZYX := 180° - \sphericalangle XYZ$. Mit dieser Konvention gilt z. B. für vier paarweise verschiedene Punkte W, X, Y, Z auf einer Kreislinie stets $\sphericalangle XYZ = \sphericalangle XWZ$).

1. Lösung. Die Verlängerungen von AP, BP, CP mögen den Umkreis des Dreiecks ABC erneut in A', B', C' treffen. Mit Hilfe des Peripheriewinkelsatzes und einem einfachen Winkelsummenargument finden wir $\sphericalangle B'A'C' = \sphericalangle B'A'A + \sphericalangle AA'C' = \sphericalangle B'BA + \sphericalangle ACC' = \sphericalangle BPC - \sphericalangle BAC = 60°$. Ebenso $\sphericalangle A'C'B' = 60°$ und folglich ist das Dreieck $A'B'C'$ gleichseitig, d.h. $A'B' = B'C' = C'A'$. Wie üblich haben wir $APB \sim B'PA'$ und $APC \sim C'PA'$; hieraus ergibt sich $\frac{AP}{AC} = \frac{C'P}{C'A'}$ und $\frac{BP}{BC} = \frac{C'P}{C'B'}$. In Verbindung mit vorigem lehrt dies $\frac{AP}{AC} = \frac{BP}{BC}$ und somit in der Tat $AB \cdot PC = AC \cdot PB$.

2. Lösung. Wähle den Punkt J so, daß die Dreiecke ABC, PBJ (gleichorientiert) ähnlich sind. Sodann ist $\frac{AB}{BP} = \frac{BC}{BJ}$ und $\sphericalangle PBA = \sphericalangle JBC$, weshalb auch die Dreiecke ABP, CBJ (gleichorientiert) ähnlich sein müssen. Folglich gilt $\sphericalangle CJP = \sphericalangle CJB - \sphericalangle PJB = (60° + \gamma) - \gamma = 60°$. Da auch $\sphericalangle JPC = \sphericalangle BPC - \sphericalangle BPJ = (60° + \alpha) - \alpha = 60°$ ist das Dreieck PCJ gleichseitig und mithin $PC = PJ$. Nach Wahl von J haben wir $\frac{AB}{AC} = \frac{PB}{PJ}$ und hieraus folgt mit Hilfe des vorigen wie gewünscht $AC \cdot PB = AB \cdot PJ = AB \cdot PC$.

3. Lösung. Über der Strecke BP werde das gleichseitige Dreieck BPT errichtet. Der Schnittpunkt von PT mit AB heiße G. Außerdem werde auf AC der Punkt H mit $\sphericalangle CPH = 60°$ gewählt. Wegen $\sphericalangle APG = \gamma$ und $\sphericalangle HPA = \beta$ muss $\sphericalangle HPG + \sphericalangle GAH = 180°$ sein, d.h. das Viereck $GAHP$ ist einem Kreis einbeschrieben. Demnach $\sphericalangle HGA = \sphericalangle HPA = \beta$, woraus sofort $GH \parallel BC$ geschlossen wird. Aus diesem Grund gilt $\frac{AB}{AC} = \frac{BG}{CH}$ (1). Ferner zeigen einfache Winkelbetrachtungen $\sphericalangle HCP = 60° - \sphericalangle PBG = \sphericalangle GBT$, was zusammen mit $\sphericalangle CPH = \sphericalangle BTG [= 60°]$ die Ähnlichkeit der Dreiecke PCH und TBG lehrt. Mithin haben wir $\frac{BG}{CH} = \frac{BT}{CP}$ (2). Nachdem das Dreieck BPT nach Konstruktion gleichseitig ist, gilt insbsondere $BT = BP$. Zusammen mit (1) und (2) erhalten wir hieraus $\frac{AB}{AC} = \frac{BP}{CP}$ und damit in der Tat $AB \cdot PC = AC \cdot PB$.

4. Lösung. Wähle den Punkt G so, daß die Dreiecke AGC, PBC (gleichorientiert) ähnlich sind. Wie in der zweiten Lösung sehen wir, daß dann auch die Dreiecke GBC und APC (gleichorientiert) ähnlich sind. Ferner ist $\sphericalangle BAG = \sphericalangle CAG - \sphericalangle CAB = (60° + \alpha) - \alpha = 60°$ und ebenso $\sphericalangle GBA = 60°$. Das Dreieck AGB ist also gleichseitig und mithin $AG = AB$. Nach $AGC \sim PBC$ haben wir also $PB : PC = AG : AC = AB : AC$. Daher wie behauptet $AB \cdot PC = AC \cdot PB$.

5. Lösung. Die Fußpunkte der Lote von P auf die Seiten BC, CA, AB mögen X, Y, Z genannte werden. Nach Satz von Thales besitzen die Vierecke $PXCY$, $PYAZ$, $PZBX$ jeweils einen Umkreis. Wir finden nun $\sphericalangle ZXY = \sphericalangle ZXP + \sphericalangle PXY = \sphericalangle ZBP + \sphericalangle PCY = 60°$ und analog

$\sphericalangle XYZ = \sphericalangle YZX = 60°$. Das Dreieck XYZ ist also gleichseitig. Für die Länge der Seite XY finden wir durch zweimalige Verwendung des Sinussatzes $XY = PC \cdot \sin\gamma = \frac{AB \cdot PC}{2R}$, wobei R den Radius des Umkreises des Dreiecks ABC bezeichnet. Ebenso $XZ = \frac{AC \cdot PB}{2R}$. Aus $XY = XZ$ folgt nunmehr wie verlangt $AB \cdot PC = AC \cdot PB$.

6. Lösung. Der Umkreis des Dreiecks ABP schneide AC zum zweiten Mal in Q. Wir erhalten $\sphericalangle BQA = \sphericalangle BPA = \gamma + 60°$ und hieraus nach Außenwinkelsatz $\sphericalangle QBC = 60°$. Außerdem ergibt sich aus $\sphericalangle BPQ = 180° - \alpha$ und $\sphericalangle CPB = 60° + \alpha$ sofort $\sphericalangle QPC = 120°$. Ferner erhalten wir, wenn wir $\sphericalangle ABP = \varphi$ setzen, sofort $\sphericalangle CQP = \varphi$. Durch mehrmalige Verwendung des Sinussatzes erhalten wir nun

$$\frac{PC}{PA} = \frac{PC}{CQ} \cdot \frac{CQ}{QB} \cdot \frac{QB}{AP} = \frac{\sin\varphi}{\sin 120°} \cdot \frac{\sin 60°}{\sin\gamma} \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\varphi} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{BC}{AB}.$$

Hieraus folgt sofort $AB \cdot PC = AP \cdot BC$.

7. Lösung. Über der Seite AB errichte man das gleichseitige Dreieck ABQ nach innen. Einfache Winkelbetrachtungen zeigen nun $\sphericalangle QAP = 60° - \sphericalangle PAB = \sphericalangle BCP$ und ebenso $\sphericalangle PBQ = \sphericalangle PCA$. Indem wir also den Schnittpunkt von AC mit BQ als T in die Überlegung einführen, wird das Viereck $BCTP$ wegen $\sphericalangle PBT = \sphericalangle PBQ = \sphericalangle PCA = \sphericalangle PCT$ ein Sehnenviereck sein. Folglich $\sphericalangle BTP = \sphericalangle BCP = \sphericalangle QAP$, also $\sphericalangle PTQ + \sphericalangle QAP = 180°$ und somit ist auch $PTQA$ ein Sehnenviereck. Aus diesem Grund gilt $\sphericalangle BQP = \sphericalangle TQP = \sphericalangle TAP = \sphericalangle CAP$, woraus in Verbindung mit $\sphericalangle PBQ = \sphericalangle PCA$ die Ähnlichkeit der Dreiecke BQP, CAP folgt. Hieraus erhellt $PC : AC = PB : BQ = PB : AB$, also wie gewünscht $AB \cdot PC = AC \cdot PB$.

8. Lösung. Setze $\sphericalangle ACP = \gamma'$, $\sphericalangle PBC = \gamma''$, $\sphericalangle PBA = \beta''$. Nun ist nach Sinussatz

$$\frac{\sin\beta''}{\sin\gamma'} = \frac{\sin\beta''}{AP} \cdot \frac{AP}{\sin\gamma'} = \frac{\sin(60° + \gamma)}{c} \cdot \frac{b}{\sin(60° + \beta)} = \frac{\sin(60° + \gamma)}{\sin\gamma} \cdot \frac{\sin\beta}{\sin(60° + \beta)} = \frac{1 + \sqrt{3}\cot\gamma}{1 + \sqrt{3}\cot\beta}.$$

Da jedoch $\beta'' + \gamma' = 60°$ haben wir auch

$$\frac{\sin\beta''}{\sin\gamma'} = \frac{\sin(60° - \gamma')}{\sin\gamma'} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cot\gamma' - \frac{1}{2}.$$

Diese beiden Gleichungen liefern zusammengenommen

$$\cot\gamma' = \frac{\sqrt{3} + \cot\beta + 2\cot\gamma}{1 + \sqrt{3}\cot\beta}.$$

Weiterhin

$$\frac{\sin\gamma''}{\sin\gamma'} = \frac{\sin(\gamma - \gamma')}{\sin\gamma'} = \sin\gamma\cot\gamma' - \cos\gamma.$$

Hierin setzen wir die zuvor gefundene Gleichung ein und erhalten

$$\frac{\sin\gamma''}{\sin\gamma'} = \frac{(\sqrt{3}\sin\beta\sin\gamma + \cos\beta\sin\gamma + 2\sin\beta\cos\gamma) - (\sin\beta\cos\gamma + \sqrt{3}\cos\beta\cos\gamma)}{\sin\beta + \sqrt{3}\cos\beta}$$

$$= \frac{\sin\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha}{\sin\beta + \sqrt{3}\cos\beta} = \frac{\sin(60° + \alpha)}{\sin(60° + \beta)}.$$

Daher nach Sinussatz

$$\frac{AP}{AC} = \frac{\sin\gamma'}{\sin(\beta + 60°)} = \frac{\sin\gamma''}{\sin(\alpha + 60°)} = \frac{BP}{BC},$$

d.h. wie gewünscht $AP \cdot BC = BP \cdot AC$.

9. Lösung. Der Umkreis des Dreiecks APB treffe die Gerade CP zum zweiten Mal in J. Sodann ist $\sphericalangle AJP = \sphericalangle ABP$. Zusammen mit $\sphericalangle ABP + \sphericalangle PCA = 60°$ lehrt dies $\sphericalangle CAJ = 120°$. Ebenso sehen wir $\sphericalangle JBC = 120°$ ein. Damit haben wir

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AC}{JC} \cdot \frac{JC}{BC} = \frac{\sin\sphericalangle AJC}{\sin\sphericalangle CAJ} \cdot \frac{\sin\sphericalangle JBC}{\sin\sphericalangle CJB} = \frac{\sin\sphericalangle AJP}{\sin\sphericalangle PJB} = \frac{\sin\sphericalangle ABP}{\sin\sphericalangle PAB} = \frac{AP}{BP},$$

d.h. wie behauptet $AC \cdot BP = BC \cdot AP$.