Auswahlwettbewerb zur Internationalen Mathematik-Olympiade

Lösungen zur 1. IMO-Auswahlklausur 2006

1. Aufgabe
Es seien A, B, C, D, E, F Punkte auf einem Kreis mit $AE \parallel BD$ und $BC \parallel DF$. Durch Spiegelung an der Geraden CE gehe der Punkt D in X über. Zeige, dass X so weit von der Geraden EF entfernt ist wie B von AC.

Lösung. Alle im folgenden auftretenden Winkel sind als orientiert und modulo 180° zu verstehen; dadurch wird eine Betrachtung der Lage der involvierten Punkte zueinander entbehrlich. Die Fußpunkte der Lote von B, X auf AC, EF seien mit P, Q bezeichnet.

Strategie. Zeige die Kongruenz der Dreiecke ABP, EXQ. $(*)$

Hieraus wird sich sofort $BP = XQ$ und damit die Behauptung ergeben. Der Beweis von $(*)$ selbst erfolgt vermittelst eines bekannten Kongruenzsatzes in drei Schritten.

I. Wegen $\sphericalangle BPA \equiv \sphericalangle EQX \equiv 90°$ sind beide Dreiecke rechtwinklig.

II. Da $AE \parallel BD$ ist das Sehnenviereck $ABDE$ ein gleichschenkeliges Trapez und demnach $AB = DE$. Weiterhin ist $DE = XE$ nach Konstruktion von X und mithin $AB = XE$, d.h. die Hypotenusen stimmen überein.

III. Wie vorhin schließen wir aus $BC \parallel DF$, daß auch $BCDF$ ein gleichschenkliges Trapez ist. Durch wiederholte Verwendung des Peripheriewinkelsatzes erhalten wir nun $\sphericalangle DEC + \sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle DAC + \sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle DFB \equiv \sphericalangle CDF \equiv \sphericalangle CEF \equiv \sphericalangle CEX + \sphericalangle XEF$. Infolge $\sphericalangle DEC \equiv \sphericalangle CEX$ ergibt sich hieraus $\sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle XEF$, oder — anders formuliert — $\sphericalangle PAB \equiv \sphericalangle XEQ$.

Bemerkung. Diskussionen der Lagebeziehungen sind weder positiv noch negativ in die Bewertung eingegangen.

2. Aufgabe
In einem Raum stehen 2005 Obstkisten, von denen jede eine oder mehrere Sorten Obst enthält, von jeder Obstsorte ganzzahlig viele Früchte.
a) Man zeige, dass man stets 669 Obstkisten auswählen kann, die zusammen sowohl mindestens ein Drittel aller Äpfel als auch mindestens ein Drittel aller Birnen enthalten.
b) Können die Kisten in Teil a) stets so gewählt werden, dass sie außerdem mindestens ein Drittel aller Pfirsiche enthalten?

Lösung. a) Es sei N eine Kiste, die eine maximale Anzahl von Äpfeln enthält, sagen wir n Stück. Sie werde zunächst beiseite gestellt. Wir betrachten nun alle Möglichkeiten, die verbleibenden $2004 = 3 \cdot 668$ Kisten in drei Haufen, A, B und C zu je 668 Kisten aufzuteilen. Die Gesamtzahl an Äpfeln in diesen Kisten sei a, b, c. Indem wir mit einer beliebigen solchen Aufteilung beginnen und die gebildeten Haufen gegebenenfalls umbenennen, sehen wir, daß es Aufteilungen mit $a \leqq b \leqq c$ gibt. Unter allen diesen fixieren wir für den Rest der Beweisführung eine solche, für die $c - a$ minimal ist. Wäre nun $c - a > n$, so könnten wir eine Kiste aus A mit darin maximaler Anzahl von Äpfeln gegen eine Kiste aus C mit darin minimaler Anzahl vertauschen und erhielten infolge der Maximalität von n nach eventueller Umbenennung der Haufen einen Widerspruch zur Minimalität von $c - a$. Demnach ist $c - a \leqq n$, also $a + n \geqq c \geqq b$, woraus sofort

$$a + n = \frac{(a+n) + (a+n) + a + n}{3} \geqq \frac{c + b + a + n}{3}$$

folgt. Sollten wir uns also letzten Endes entschließen, die 669 Kisten $A \cup \{N\}$ zu nehmen, d.h. die Kisten des Haufens A zusammen mit der Kiste N, so hätten wir zumindest die Bedingung über die Anzahl der zu nehmenden Äpfel erfüllt. Dies gilt natürlich erst recht für $B \cup \{N\}$ und $C \cup \{N\}$. Nun sei (nach Schubfachprinzip) T ein solcher der drei Haufen, der mindestens ein Drittel der in ihnen zusammen vorkommenden Birnen enthält. Damit erfüllt die Auswahl

$T \cup \{N\}$ sicher die Anforderung an die zu wählende Anzahl von Birnen und ist folglich nach obigem wie gewünscht.

b) Hier genügt die Angabe eines Gegenbeispiels. Es enthalte eine der Kisten nichts außer einem Apfel, eine weitere bloß eine Birne und in den übrigen 2003 Kisten möge jeweils ein Pfirsich liegen. Wollte man nun den gestellten Bedingungen genügen, müßte man die Kiste mit dem Apfel, die Kiste mit der Birne und 668 Kisten mit einem Pfirsich auswählen, bräuchte also insgesamt 670 Kisten.

Bemerkung. In Teilaufgabe (a) ist es instruktiv, den Fall zu betrachten, daß es 1002 Kisten mit jeweil $2m$ Äpfeln aber keiner Birne, 1002 Kisten mit jeweils $2m$ Birnen aber keinem Apfel und eine Kiste, (H), mit m Äpfeln und m Birnen gibt, wobei m für eine womöglich große natürliche Zahl (z.B. 100000) steht. Man überzeugt sich leicht, daß Kiste H genommen werden muß. Dies ist auch dann noch der Fall, wenn die beschriebene Konfiguration geringfügig, d.h. um im Vergleich zu m sehr kleine Anzahlen von Früchten (z.B. 1, 2, 3) geändert wird. Nun führen die meisten vorgeschlagenen algorithmischen Ansätze der Form „Man nehme solange Kisten mit maximal vielen Früchten/Äpfeln/Birnen, bis ... und danach immer Kisten mit maximal vielen ...“ nicht immer darauf, in den beschriebenen Situationen die Kiste H zu nehmen. Daher lösen sie ohne weiteres die Aufgabe nicht.

3. Aufgabe

Lassen sich für jede positive ganze Zahl n nicht-negative ganze Zahlen a, b, c, d, e, f, g, h mit

$$n = \frac{2^a - 2^b}{2^c - 2^d} \cdot \frac{2^e - 2^f}{2^g - 2^h}$$

finden? Die Antwort ist zu begründen.

Vorbemerkung: Im Folgenden sei n ungerade. Ohne Einschränkung ist $a > b$, $c > d$, $e > f$, $g > h$. Die Bedingungsgleichung ist dann äquivalent zu $n2^{d+h-b-f}(2^{c-d} - 1)(2^{g-h} - 1) = (2^{a-b} - 1)(2^{e-f} - 1)$. Da n ungerade ist, gilt $d + h - b - f = 0$, und man kann ohne Einschränkung $d = h = b = f = 0$ setzen:

$$n(2^c - 1)(2^g - 1) = (2^a - 1)(2^c - 1) \qquad (*)$$

1. Lösung (skizziert): Die Zahlen der Form $n = 19 + 64k$ mit ganzzahligem $k \geqq 0$ lassen sich nicht darstellen. Für $x > 1$ liefert $2^x - 1$ Rest 3 bei Division durch 4, für $x = 1$ Rest 1. Nur wenn eine ungerade Anzahl der Variablen a, c, e, g Wert 1 hat, kann Gleichung (*) erfüllt sein. Haben drei der Variablen Wert 1, kann die Gleichung nicht gelten, da n ncht die Form $2^x - 1$ hat. Also hat genau eine der Klammern in (*) Wert 1. Durch entsprechende Überlegungen und Fallunterscheidungen zu Resten bei Division durch 8, 16, 32, 64 kann man die Werte der restlichen Klammern festlegen und jeweils zum Widerspruch führen.

2. Lösung (skizziert): Die Zahl $n = 19$ ist nicht darstellbar. Man nutzt die Beziehung $\mathrm{ggT}(2^x - 1, 2^y - 1) = 2^{\mathrm{ggT}(x,y)} - 1$, um zu zeigen: Aus $(2^x - 1)|(2^y - 1)(2^z - 1)$ folgt $x|y$ oder $x|z$.
Hieraus folgt mit (*), dass sich 19 als

$$19 = \frac{2^a - 1}{2^c - 1} \cdot \frac{2^e - 1}{2^g - 1} \qquad \text{oder} \qquad 19 = \frac{2^a - 1}{(2^c - 1)(2^g - 1)} \cdot (2^e - 1)$$

als Produkt zweier ganzzahliger Faktoren schreiben lässt. Da 19 eine Primzahl ist und nicht die Form $2^e - 1$ hat, genügt es zu zeigen, dass die Gleichung

$$19 = \frac{2^a - 1}{(2^c - 1)(2^g - 1)}$$

(damit auch $19 = (2^a - 1)/(2^c - 1) = (2^a - 1)/((2^c - 1)(2^1 - 1))$ nicht gelten kann. Der Zähler enthält den Primfaktor 19, was nur für $a \geq 18$ möglich ist. Die Zahlen c und g teilen a, ohne Einschränkung ist $c \geq g$. Für $c = g = a/2$ hat der Bruch den nichtganzzahligen Wert $1 + 2/(2^{a/2} - 1)$, für $c \leq a/3$, $g \leq a/3$ oder für $c = a/2$, $g \leq a/4$ ist der Wert zu groß. Damit ist $c = a/2$, $g = a/3$, und der Bruch hat den nicht ganzzahligen Wert $2^{a/6} + 1/(2^{a/6} - 1)$.

Bemerkung: Nicht immer ist n Produkt zweier ganzzahliger Faktoren der Form $(2^x - 1)/(2^y - 1)$. Beispielsweise ist $13 = \frac{(2^{12}-1)(2^2-1)}{(2^6-1)(2^4-1)}$, aber man kann wie bei der 2. Lösung zeigen, dass 13 nicht in der Form $(2^x - 1)/(2^y - 1)$ darstellbar ist.