Internationale Mathematik-Olympiade

Auswahlwettbewerb zur IMO 2005

Lösungen zur 1. Auswahlklausur

Aufgabe 1

Gegeben sind die positiven reellen Zahle a und b und die natürliche Zahl n.
Man ermittle in Abhängigkeit von a, b und n das größte der n + 1 Glieder in der Entwicklung von $(a + b)^n$.

Lösung

Das k–te Glied G(k) in der Entwicklung von $(a + b)^n$ ist gegeben durch die Formel:

$$G(k) = \binom{n}{k-1} \cdot a^{n-k+1} \cdot b^{k-1}, \text{ wobei } \binom{n}{0} = 1 \text{ und } 1 \le k \le n + 1.$$

Da es endlich viele Glieder gibt und jede endliche Zahlenmenge (mindestens) ein maximales Element enthält, wird untersucht unter welchen Bedingungen das k–te Element maximal ist. Dafür müssen die folgenden Beziehungen gleichzeitig erfüllt sein:

$$\binom{n}{k-1} \cdot a^{n-k+1} \cdot b^{k-1} \ge \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^{k} \text{ und } \binom{n}{k-1} \cdot a^{n-k+1} \cdot b^{k-1} \ge \binom{n}{k-2} \cdot a^{n-k+2} \cdot b^{k-2},$$

wobei im letzten Fall $k \ge 2$ sein muss und eine dieser Ungleichungen streng ist (einfacher Nachweis!).

Das führt einerseits zu $\frac{1}{n-k+1} \cdot a \ge \frac{1}{k} \cdot b$ und andererseits zu $\frac{1}{k-1} \cdot b \ge \frac{1}{n-k+2} \cdot a$,

woraus sowohl $n+1 \ge k \ge \frac{nb+b}{a+b}$, als auch $1 \le k \le \frac{nb+2b+a}{a+b} = \frac{nb+b}{a+b} + 1$ folgt.

Falls $i = \frac{nb+b}{a+b}$ nicht ganzzahlig ist, ist G(i) das größte Glied, andernfalls sind G(i) und G(i+1) maximal.
Weitere maximale Glieder kann es nicht geben.

Aufgabe 2

Sei E = { –1, 0, 1 } und M eine Menge von Gitterpunkten der Ebene. Die Punkte aus M sind so durch ein Streckennetz (S) miteinander verbunden, dass man von jedem Punkt aus M zu jedem anderen Punkt aus M gelangen kann ohne (S) zu verlassen. Dabei können die Strecken des Streckennetzes außer den Gitterpunkten auch andere Endpunkte enthalten.
Man ermittle die kürzeste Gesamtlänge des Streckennetzes, falls:

a) $M = \{ (i,j) \mid i, j \in E \text{ und } i \cdot j = 0 \}$
b) $M = \{ (i,j) \mid i, j \in E \}$

Lösung

Teil a): Aus Symmetriegründen reicht es zunächst das günstigste Streckennetz für die Punkte O(0,0), A(1,0) und C(0,1) zu finden. Durch Spiegelung an O erhält man dann das gewünschte Netz für die Punkte aus M. Durch eine Drehung der Ebene xOy um O mit Drehwinkel 60° (Fig. 1) wird das Dreieck ΔOAC in das Dreieck ΔOA´C´ überführt, wobei die Strecke P´C´ das Bild von PC ist. Das kürzeste Streckensystem, das die Punkte O, A und C wie gefordert verbindet, hat also eine Gesamtlänge, die gleich jener der Strecke AC´ ist.

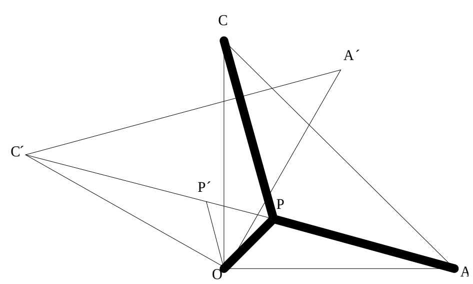


Fig. 1

Im Dreieck $\Delta OAC'$ ist aber $AC' = \sqrt{2 - 2\cos 150^\circ} = \sqrt{2+\sqrt{3}}$ (Kosinussatz).
Durch Spiegelung am Ursprung O erhält man ein für Teil a) kürzestes Streckensystem mit einer Gesamtlänge von $2\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{2}+\sqrt{6}$.

Teil b): Ebenfalls aus Symmetriegründen reicht es zunächst das kürzeste Streckensystem für die Punkte D(−1|1), O(0|0), A(1|0), B(1|1) und C(0|1) zu finden. Da die Entfernung von D zu den restlichen vier Punkten mindestens 1 beträgt, hat ein solches System eine Gesamtlänge von $1+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = 1+1+\sqrt{3} = 2+\sqrt{3}$ (siehe Fig. 2).

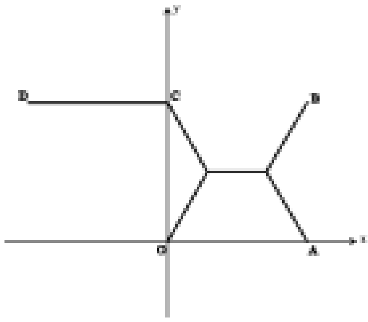
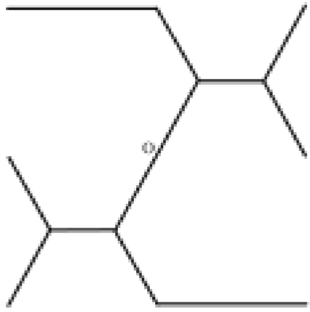


Fig. 2



Damit ergibt sich (nach Spiegelung an O) für b) eine Gesamtlänge von $2(2+\sqrt{3}) = 4+2\sqrt{3}$.

Bemerkung: Der Punkt P aus Teil a) ist der **Fermat−Punkt** des Dreiecks ΔOAC; die Summe seiner Abstände zu den Eckpunkten O, A und C ist minimal. Jedes Dreieck, in dem kein Winkel größer−gleich 120° ist, enthält im Inneren einen solchen Punkt. Ist aber z.B. in einem Dreieck ΔABC $\alpha \geq 120°$, dann ist dort AB + AC minimal. Diese Eigenschaften wurden wohl zum ersten Mal von Evangelista Torricelli (1608 − 1647) entdeckt und von Pierre Fermat (1601 − 1665) weiter untersucht.

Aufgabe 3

Man beweise: Ist $4^n \cdot 7 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ mit $n, a, b, c, d \in N \setminus \{0\}$, dann kann keine der Quadratzahlen die Zahl 4^{n-1} unterschreiten.

Lösung

Ist $n = 1$, dann ist die Behauptung richtig; die einzigen Lösungen für a, b, c, d sind, abgesehen von der Reihenfolge, die Quadrupel (1,1,1,5), (1,3,3,3) und (2,2,2,4).
Für jedes $n \geq 1$ ist $4^n \cdot 7$ durch 4 teilbar. Da das Quadrat einer natürlichen Zahl bei der Division durch 4 nur die Reste 0 oder 1 haben kann, kommen für a, b, c, d nur Zahlen gleicher Restklasse modulo 4 in Frage.
Sind a, b, c, d (alle) ungerade, dann ist die rechte Seite zwar durch 4, nicht aber durch 8 und erst recht nicht durch 16 teilbar. In diesem Fall kommt also nur $n = 1$ in Frage.
Sollte $n > 1$ sein, dann müssen die vier Zahlen auf der rechten Seite demnach alle gerade sein.
Vorausgesetzt die Eigenschaft, dass alle Quadratzahlen 4^{n-1} überschreiten, gilt nicht für alle n, dann gibt es ein kleinstes k ($k \in N$) für das sie nicht gilt. Da sie für $n = 1$ gilt, muss k größer 1 sein. Dann sind aber (siehe oben) a, b, c, d alle gerade. Man könnte also beide Seiten durch 4 teilen und die Eigenschaft dürfte auch für $k-1$ nicht gelten, was aber wegen der Minimalität von k nicht sein kann. Die Behauptung stimmt also für alle natürlichen Zahlen n, $n \geq 1$.