Internationale Mathematik-Olympiade

# Auswahlwettbewerb zur IMO 2004

## Lösungen zur 1. Auswahlklausur

### Aufgabe 1

Eine Funktion $f$ ist gegeben durch $f(x)+f(1-\frac{1}{x})=1+x$ für $x \in \mathbb{R}\setminus\{0, 1\}$.

Man ermittle eine Formel für $f$.

#### Lösung

Sei $x \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ und $y=1-\frac{1}{x}$ und $z=\frac{1}{1-x}$. Es ist leicht einzusehen, dass zusammen mit $x$ auch $y$ und damit auch $z$ zu $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ gehören.
Einsetzen von $y$ und $z$ in die Ausgangsgleichung führt zu:

$$f(1-\frac{1}{x})+f(\frac{1}{1-x})=2-\frac{1}{x} \quad \text{und} \quad f(\frac{1}{1-x})+f(x)=1+\frac{1}{1-x}$$

Durch Subtraktion der beiden letzten Beziehungen erhält man:

$$f(x)-f(1-\frac{1}{x})=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x}-1$$

und nach Addition zur Ausgangsgleichung führt das schließlich zu

$$f(x)=\frac{1}{2}(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x}+x)=\frac{-x^3+x^2+1}{2x(1-x)}$$

### Aufgabe 2

Im Dreieck $ABC$ ist $AD$ ($D \in BC$) eine Seitenhalbierende, $E$ ein Punkt auf $AC$ und $F$ der Schnittpunkt von $BE$ mit $AD$.

Man beweise: Falls $\frac{BF}{FE}=\frac{BC}{AB}+1$, dann ist $BE$ eine Winkelhalbierende.

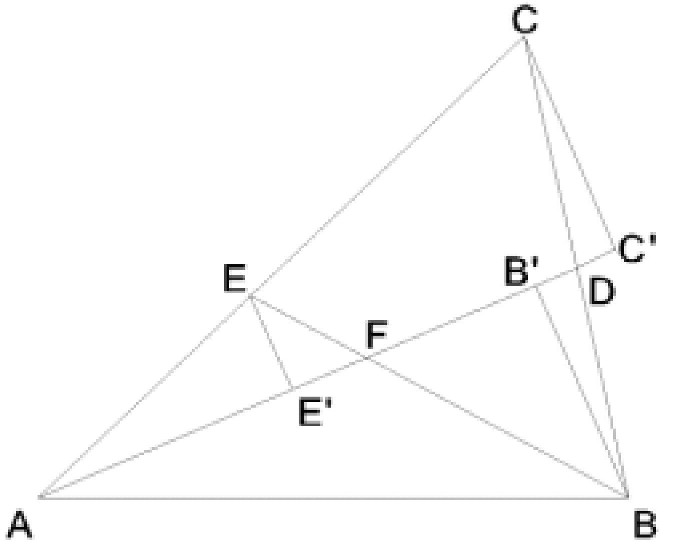
#### Lösung

Seien $B'$, $C'$, $E'$ die Projektionen von B, $C$ und $E$ auf die Gerade $AD$. Die rechtwinkligen Dreiecke $\Delta DBB'$ und $\Delta DCC'$ sind kongruent, da $D$ der Mittelpunkt von $BC$ ist und die spitzen Winkel bei $D$ gleich groß sind. Daraus folgt, dass $BB'=CC'$.
Im Dreieck $\Delta AC'C$ ist $EE'$ parallel zu $CC'$ und folglich

$$\frac{AC}{AE}=\frac{CC'}{EE'}=\frac{BB'}{EE'}.$$

Die rechtwinkligen Dreiecke $\Delta BB'F$ und $\Delta EE'F$ sind ähnlich, da die Winkel bei $F$ gleich sind. Daraus folgt $\frac{BB'}{EE'}=\frac{BF}{FE}$, was zusammen mit der vorletzten Beziehung zu

$$\frac{AC}{AE}=\frac{BF}{EF}$$ führt.



Ersetzt man nun $\frac{BF}{EF}$ in der Ausgangsbeziehung durch $\frac{AC}{AE}$, ergibt sich:

$\frac{BC}{AB}+1=\frac{AC}{AE}=\frac{BC+AB}{AB}$, was zu $\frac{AC-AE}{AE}=\frac{BC}{AB}$ und schließlich zu $\frac{EC}{AE}=\frac{BC}{AB}$ führt.

Gemäß der Umkehrung des Satzes der Winkelhalbierenden ist $BE=w_\beta$.

## Aufgabe 3

Gegeben sind die sechs reellen Zahlen *a*, *b*, *c* und *x*, *y*, *z* so, dass
a) $0<b-c<a<b+c$
b) $ax+by+cz=0$
Man ermittle (mit Begründung!) das Vorzeichen von $ayz+bxz+cxy$.

### Lösung

Aus $0 < b - c < a < b + c$ folgt, dass *a*, *b* und *c* positiv sind. Außerdem kann man mit Strecken dieser Längen ein Dreieck konstruieren. Daraus folgt, dass die Zahlen $-a + b + c$, $a - b + c$ und $a + b - c$ positiv sind.

Aus $ax + by + cz = 0$ folgt $x=-\frac{by+cz}{a}$.

Es ergibt sich

$$ayz+bzx+cxy=ayz-\frac{1}{a}(by+cz)(bz+cy)=-\frac{1}{a}(b^2yz+bcy^2+cbz^2+c^2yz-a^2yz).$$

Es reicht zu zeigen, dass der Term in der letzten Klammer nicht negativ ist.
Eine einfache Umformung ergibt

$$b^2yz+bcy^2+cbz^2+c^2yz-a^2yz=bcy^2+bcz^2+(b^2+c^2-a^2)yz$$

Da *a* und *c* positiv sind, kann man den Term mit $4bc$ multiplizieren, ohne dass sich das Vorzeichen ändert. Es ist also das Vorzeichen von $4b^2c^2y^2+4b^2c^2z^2+4bc(b^2+c^2-a^2)yz$ zu untersuchen. Durch Addition und Subtraktion von $(b^2+c^2-a^2)^2z^2$ ergibt sich der Reihe nach:

$$4b^2c^2y^2+4bcyz(b^2+c^2-a^2)+(b^2+c^2-a^2)z^2+[4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2]z^2=$$

$$=[2bcy+(b^2+c^2-a^2)z]^2+[4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2]z^2$$

Das Vorzeichen des letzten Terms ist nicht negativ, da der erste Teil ein Quadrat ist und im zweiten Teil $4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2=(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$ positiv ist.
Die Zahl $ayz+bzx+cxy$ ist folglich nicht positiv.