Internationale Mathematik-Olympiade

Auswahlwettbewerb zur IMO 2003

Lösungen zur 1. Auswahlklausur

Aufgabe 1

Beim Schachspiel erhält der Sieger 1 Punkt und der Besiegte 0 Punkte. Bei Unentschieden (Remis) erhält jeder der Spieler ½ Punkt.
Vierzehn Schachspieler, von denen keine zwei gleich alt waren, trugen einen Wettbewerb aus, in dem jeder gegen jeden spielte. Nach Abschluss des Wettbewerbs wurde eine Rangliste erstellt. Von zwei Spielern mit gleicher Punktezahl, erhält der Jüngere eine bessere Platzierung.
Nach dem Wettbewerb stellte Jan fest, dass die drei Bestplatzierten insgesamt genau so viele Punkte erhielten wie die Gesamtzahl der Punkte der letzten neun Spieler. Jörg bemerkte dazu, dass dabei die Zahl der unentschieden ausgegangenen Spiele maximal war.
Man ermittle die Anzahl der unentschiedenen Spiele.

Lösung

Die Gesamtzahl der Punkte der letzten neun Spieler beträgt mindestens $(9 \cdot 8):2 = 36$ Punkte (denn wenn nur jeder der neun gegen einen anderen der neun spielen würde, dann wären es, da in jeder Partie ein Punkt vergeben wird, insgesamt schon 36 Punkte).
Die Gesamtzahl der drei Erstplatzierten ist aber höchstens $13 + 12 + 11 = 36$ Punkte, falls sie alle Spiele gegen die restlichen 13 Spieler gewinnen würden.
Es folgt also, dass die letzten neun Spieler keines der Spiele mit den anderen gewinnen und die drei ersten, alle, wobei sie untereinander durchaus unentschieden spielen können.
Die Anzahl der unentschieden gespielten Partien (die ja gemäß Jörg maximal ist!) muss also $3 + 1 + 36 = 40$ sein.

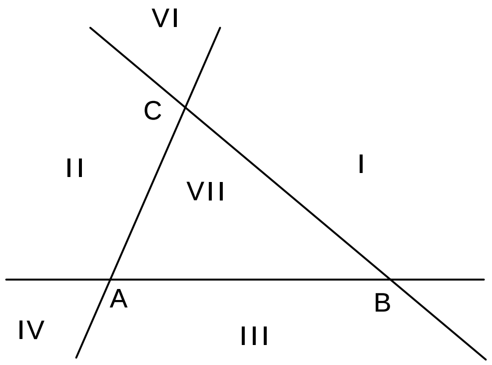
Aufgabe 2

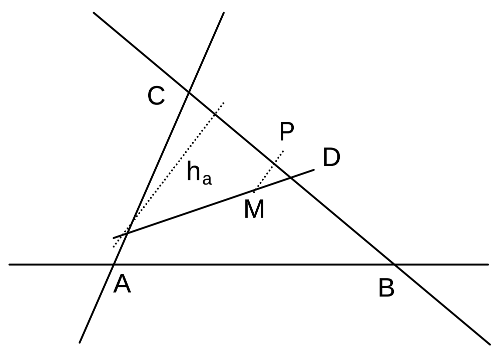
Gegeben ist ein Dreieck ABC und ein Punkt M so, dass die Geraden MA, MB, MC die Geraden BC, CA, AB (in dieser Reihenfolge) in D, E beziehungsweise F schneiden.
Man beweise, dass es dann stets die Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ aus $\{-1, 1\}$ gibt, so dass gilt:

$$\varepsilon_1 \cdot \frac{MD}{AD} + \varepsilon_2 \cdot \frac{ME}{BE} + \varepsilon_3 \cdot \frac{MF}{CF} = 1$$

Lösung

Punkt M ($M \notin \{A, B, C\}$) kann entweder auf einer der vorgegebenen Geraden, oder in einer der sieben Gebiete liegen, in denen die Ebene des Dreiecks ABC durch die Geraden AB, BC, CA geteilt wird.





Es ist stets $$\frac{MD}{AD}=\frac{MP}{h_a}=\frac{0{,}5\cdot MP\cdot BC}{0{,}5\cdot h_a\cdot BC}=\frac{F(MBC)}{F(ABC)},$$
(Strahlensatz)

wobei $P\in BC$ und $MP\perp BC$ und $F(XYZ)$ der Inhalt des Dreiecks XYZ ist. Ähnliches gilt für die anderen Verhältnisse.
Liegt M im Inneren oder am Rande des Dreiecks ABC, dann ist also:
$$\frac{MD}{AD}+\frac{ME}{BE}+\frac{MF}{CF}=\frac{F(MBC)}{F(ABC)}+\frac{F(MCA)}{F(ABC)}+\frac{F(MAB)}{F(ABC)}=1$$
woraus $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=1$ folgt.
Ähnliche Überlegungen führen auch dann ans Ziel, wenn M außerhalb des Dreiecks ABC liegt, nur dass ε_1, ε_2 bzw. $\varepsilon_3=-1$, falls M im Bereich I, II bzw. III liegt. Sollte M in den Bereichen IV, V bzw. VI liegen, dann sind genau zwei der ε_i gleich -1.
Etwas eleganter und straffer lässt sich der Beweis führen, falls man orientierte Strecken oder Flächen verwendet.

Aufgabe 3

Sei N eine natürliche Zahl und $x_1, x_2, \dots, x_n$ weitere natürliche Zahlen kleiner als N und so, dass das kleinste gemeinsame Vielfache von beliebigen zwei dieser n Zahlen größer als N ist.
Man beweise, dass die Summe der Kehrwerte dieser n Zahlen stets kleiner 2 ist; also
$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}<2$$

Lösung

Da das kgV von x_i und x_j größer als N ist, gibt es unter den Zahlen $1, 2, \dots, N$ keine zwei, die sowohl Vielfache von x_i, als auch von x_j sind.
Unter den Vielfachen der natürlichen Zahl x gibt es zwei so, dass $kx \le N < (k+1)x$, woraus $k \le \frac{N}{x} < k+1$ folgt. Die Anzahl der Vielfachen von x, die kleiner N sind, ist demnach der ganzzahlige Teil von $\frac{N}{x}$, also gleich $\left[\frac{N}{x}\right]$.

Für die Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_n$ gilt folglich $\left[\frac{N}{x_1}\right]+\left[\frac{N}{x_2}\right]+\cdots+\left[\frac{N}{x_n}\right]<N$.

Andrerseits ist $\left[\frac{N}{x_i}\right]>\frac{N}{x_i}-1$ und demnach $\frac{N}{x_1}+\frac{N}{x_2}+\cdots+\frac{N}{x_n}-n<N$.
Da aber $n < N$ ist folgt:
$\frac{N}{x_1}+\frac{N}{x_2}+\cdots+\frac{N}{x_n}<2N$, was schließlich zu $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}<2$ führt.