Internationale Mathematik-Olympiade

Auswahlwettbewerb zur IMO 2002

Lösungen zur 1. Auswahlklausur

Aufgabe 1

Man ermittle die Anzahl aller Zahlen der Form $x^2 + y^2$ $(x, y \in \{1, 2, 3, \ldots, 1000\})$, die durch 121 teilbar sind.

Lösung

Die Reste, die eine Quadratzahl bei der Division durch 11 haben kann, sind 0, 1, 4, 9, 5 und 3. Da aber, außer zur Null, keine komplementären Reste modulo 11 auftreten, müssen sowohl x^2 als auch y^2 und folglich auch x und y durch 11 teilbar sein.
Unter den Zahlen von 1 bis 1000 gibt es genau $[1000/11] = 90$ Vielfache von 11. Es gibt demnach höchstens $90 \cdot 89/2 = 4005$ durch 121 teilbare Zahlen der Form $x^2 + y^2$ mit $x \neq y$, und genau 90 durch 121 teilbare Zahlen der Form $x^2 + x^2$. Folglich kann es höchstens 4095 Zahlen der genannten Form geben. Ihre Anzahl ist allerdings geringer, da es viele Zahlen gibt, die unterschiedliche Darstellungen als Summe zweier Quadrate erlauben. Leider hatte das der Aufgabensteller bei der Formulierung der Aufgabe nicht bedacht. Umso erfreulicher war die Tatsache, dass einige Teilnehmer sehr interessante Lösungsansätze lieferten.

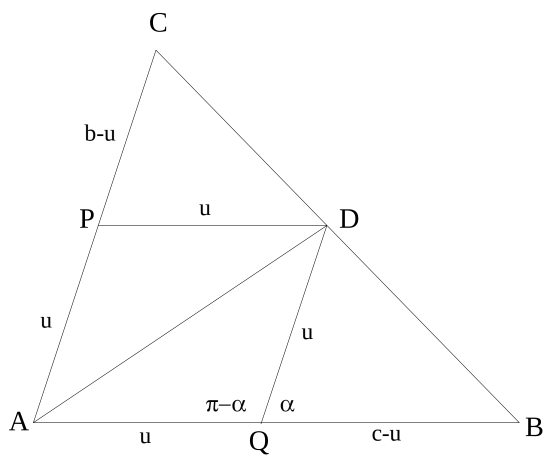
Aufgabe 2

Man beweise: Sind x, y, z die Längen der Winkelhalbierenden eines Dreiecks mit dem Umfang 6, dann gilt

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \geq 1 \ .$$

Lösung

Man beachte nebenstehende Figur.
DP und DQ sind die Parallelen durch D zu AB und AC. Da AD = x die Winkelhalbierende von α ist, ist AQDP eine Raute, deren Seitenlänge mit u bezeichnet wurde.



Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke PDC mit QBD folgt $\frac{u}{c-u} = \frac{b-u}{u}$, woraus man $u = \frac{bc}{b+c}$ erhält.

Der Kosinussatz im Dreieck AQD führt zu

$$x^2 = 2u^2 - 2u^2\cos(\pi-\alpha) = 2u^2(1 + \cos\alpha)$$

$$= 2u^2\left(1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) = 2u^2\,\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc} =$$

$$= \frac{bc}{(b+c)^2}(a+b+c)(-a+b+c)$$

Mit $(b + c)^2 \geq 4bc$ und $a + b + c = 6$ folgt $x^2 \leq 1{,}5\,(-a + b + c)$.
Ähnlich ergibt sich $y^2 \leq 1{,}5\,(a - b + c)$ und $z^2 \leq 1{,}5\,(a + b - c)$.

Aus der Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel dreier positiver Zahlen, ergibt sich $\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)(x^2+y^2+z^2)\geq 9$ und hieraus schließlich

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\geq \frac{9}{x^2+y^2+z^2}\geq \frac{9}{1{,}5\cdot 6}=1,$$

wobei das Gleichheitszeichen nur für x = y = z gilt.

Aufgabe 3

Man ermittle alle Lösungen der Gleichung $x^{2y}+(x+1)^{2y}=(x+2)^{2y}$ mit x, y ∈ N.

Lösung

Man erkennt leicht, dass weder x, noch y, Null sein können.
Für y = 1 erhält man aus $x^2 + (x + 1)^2 = (x + 2)^2$ die Gleichung $x^2 - 2x - 3 = 0$, von der nur die Lösung x = 3 in Frage kommt.
Sei nun y > 1.
Da x und x + 2 dieselbe Parität haben, ist x + 1 eine gerade und demnach x eine ungerade Zahl.
Mit x = 2k – 1 (k ∈ N) ergibt sich die Gleichung

(#) $(2k - 1)^{2y} + (2k)^{2y} = (2k + 1)^{2y}$

woraus man durch Ausmultiplizieren folgendes erhält:

$$(2k)^{2y} - 2y(2k)^{2y-1} + \ldots - 2y2h + 1 + (2k)^{2y} = (2k)^{2y} + 2y(2k)^{2y-1} + \ldots + 2y2k + 1.$$

Da y > 1, ist auch 2y ≥ 3. Lässt man nun alle Glieder in yk auf einer Seite und faktorisiert auf der anderen Seite $(2k)^3$, dann erhält man:

$$8yk = (2k)^3\left[2\binom{2y}{3}+2\binom{2y}{5}(2k)^2+\ldots-(2k)^{2y-3}\right]$$

woraus folgt, dass y ein Vielfaches von k ist.
Durch Division der Gleichung (#) durch $(2k)^{2y}$ ergibt sich:

$$\left(1-\frac{1}{2k}\right)^{2y}+1=\left(1+\frac{1}{2k}\right)^{2y}$$

wobei die linke Seite kleiner als 2 ist. Die rechte Seite ist allerdings größer als $1+\frac{2y}{2k}\geq 2$, was nicht sein kann, da y ein Vielfaches von k ist.

Die gegebene Gleichung hat demnach nur die Lösung x = 3 und y = 1.

Dass es für y > 1 keine Lösungen geben kann, war den meisten Teilnehmern klar, da sich ein Sonderfall für den großen Satz von Fermat ergibt, der mittlerweile bewiesen ist. Leider gelang nur wenigen ein vollständiger Beweis dieses Sonderfalles.