

1. Auswahlklausur 2019/2020 (28. November 2019)

Aufgabe 1

Die reellen Zahlen $r_1, r_2, \dots, r_{2019}$ erfüllen die Bedingungen

$$r_1 + r_2 + \dots + r_{2019} = 0 \quad \text{sowie} \quad r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_{2019}^2 = 1.$$

Es sei $a = \min(r_1, r_2, \dots, r_{2019})$ und $b = \max(r_1, r_2, \dots, r_{2019})$. Man beweise:

$$ab \leq \frac{-1}{2019}.$$

Aufgabe 2

Gegeben sei ein Dreieck ABC . Ein Kreis k geht durch A , schneidet die Seiten \overline{AB} und \overline{AC} nochmals in den Punkten D bzw. E und schneidet die Seite \overline{BC} in den Punkten F und G , wobei F zwischen B und G liegt. Die Tangente an den Kreis durch B, D und F in F und die Tangente an den Kreis durch C, E und G in G schneiden sich in einem Punkt T . Wir nehmen an, dass $A \neq T$ gilt.

Man beweise, dass die Geraden AT und BC parallel sind.

Aufgabe 3

Es seien m und n zwei positive ganze Zahlen.

Man beweise, dass die ganze Zahl $m^2 + \left\lceil \frac{4m^2}{n} \right\rceil$ keine Quadratzahl ist.

(Dabei bezeichnet $\lceil x \rceil$ die kleinste ganze Zahl, die nicht kleiner als x ist.)

Bearbeitungszeit: 240 Minuten

Als Hilfsmittel sind nur Schreibzeug, Zirkel und Geo-Dreieck zugelassen!

» BILDUNG & BEGABUNG GEMEINNÜTZIGE GMBH

Kortrijker Straße 1, 53177 Bonn | Postfach 20 02 01, 53132 Bonn | Tel.: +49 228 959 15-0
Fax: +49 228 959 15-19 | info@bildung-und-begabung.de | www.bildung-und-begabung.de
Bankverbindung: Sparkasse KölnBonn | IBAN: DE27 3705 0198 0029 0022 50 | BIC: COLSDE33XXX
Registergericht: Amtsgericht Essen, HRB 22445 | St.-Nr.: 206/5887/1089 | USt.-IDNr.: DE217481695
Geschäftsführung: Prof. Dr. Elke Völmicke, Bettina Jorzik

Das bundesweite Talentförderzentrum Bildung & Begabung ist eine Tochter des Stifterverbandes.
Förderer sind das Bundesministerium für Bildung und Forschung und die Kultusministerkonferenz. Schirmherr ist der Bundespräsident.

2. Auswahlklausur 2019/2020 (4. Dezember 2019)

Aufgabe 1. Ein Pirat möchte einen Schatz, bestehend aus 1000 Goldmünzen, die jeweils mindestens 1 g und zusammen genau 2 kg wiegen, in zwei Teile aufteilen, die in ihrer Masse jeweils um höchstens 1 g von 1 kg abweichen. Beweisen Sie, dass dies möglich ist.

Aufgabe 2. Es seien ein Dreieck ABC mit Umkreis Ω sowie Punkte A_1 , B_1 und C_1 auf den Dreiecksseiten \overline{BC} , \overline{CA} und \overline{AB} gegeben, sodass die drei Geraden AA_1 , BB_1 und CC_1 einen Punkt P gemeinsam haben.

Es ist zu zeigen, dass höchstens zwei der drei Spiegelpunkte von P bei Punktspiegelung an A_1 , B_1 , bzw. C_1 außerhalb von Ω liegen.

Aufgabe 3. Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Zeigen Sie, dass es ganze Zahlen a, b und c gibt, die nicht alle 0 sind, sodass die Ungleichung $|a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{5}| < \varepsilon$ erfüllt ist.

Beweisen Sie außerdem, dass in jedem Tripel $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ ganzer Zahlen, für das diese Ungleichung gilt, mindestens einer der Absolutbeträge $|a|$, $|b|$, $|c|$ größer als $\varepsilon^{-1/3}/\sqrt{30}$ ist.

Bearbeitungszeit: 240 Minuten

Als Hilfsmittel sind nur Schreibzeug, Zirkel und Geo-Dreieck zugelassen!

» BILDUNG & BEGABUNG GEMEINNÜTZIGE GMBH

Kortrijker Straße 1, 53177 Bonn | Postfach 20 02 01, 53132 Bonn | Tel.: +49 228 959 15-0
Fax: +49 228 959 15-19 | info@bildung-und-begabung.de | www.bildung-und-begabung.de
Bankverbindung: Sparkasse KölnBonn | IBAN: DE27 3705 0198 0029 0022 50 | BIC: COLSDE33XXX
Registergericht: Amtsgericht Essen, HRB 22445 | St.-Nr.: 206/5887/1089 | USt.-IDNr.: DE217481695
Geschäftsführung: Prof. Dr. Elke Völmicke, Bettina Jorzick

Das bundesweite Talentförderzentrum Bildung & Begabung ist eine Tochter des Stifterverbandes.
Förderer sind das Bundesministerium für Bildung und Forschung und die Kultusministerkonferenz. Schirmherr ist der Bundespräsident.