

## 1. Auswahlklausur 2017/2018

**Aufgabe 1.** Ein Rechteck  $\mathcal{R}$  mit ungeraden ganzzahligen Seitenlängen ist in Rechtecke unterteilt, die alle ganzzahlige Seitenlängen haben. Man beweise, dass für mindestens eines dieser Rechtecke die Abstände zu jeder der vier Seiten von  $\mathcal{R}$  alle gerade oder alle ungerade sind.

**Aufgabe 2.** Es sei eine positive ganze Zahl  $d$  und eine Folge  $(a_i)_{i=1,2,3,\dots}$  positiver ganzer Zahlen gegeben. Wir nehmen an, dass folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

- Jede positive ganze Zahl taucht genau einmal in der Folge auf.
- Für alle Indizes  $i \geq 10^{100}$  gilt  $|a_{i+1} - a_i| \leq 2d$ .

Man beweise, dass unendlich viele Indizes  $j$  existieren, für die  $|a_j - j| < d$  gilt.

**Aufgabe 3.** Es sei  $ABC$  ein Dreieck. Der dem Punkt  $A$  gegenüberliegende Ankreis  $\omega$  berühre die Strecke  $\overline{BC}$  sowie die Strahlen  $AC$  und  $AB$  in den Punkten  $D$ ,  $E$  bzw.  $F$ . Der Umkreis des Dreiecks  $AEF$  schneide die Gerade  $BC$  in den Punkten  $P$  und  $Q$ . Schließlich sei  $M$  der Mittelpunkt der Strecke  $\overline{AD}$ . Man beweise, dass sich  $\omega$  und der Umkreis des Dreiecks  $MPQ$  berühren.

**Bearbeitungszeit: 240 Minuten**

Als Hilfsmittel sind nur Schreibzeug, Zirkel und Geo-Dreieck zugelassen!

### » BILDUNG & BEGABUNG GEMEINNÜTZIGE GMBH

Kortrijker Straße 1, 53177 Bonn | Postfach 20 02 01, 53132 Bonn | Tel.: +49 228 959 15-0  
Fax: +49 228 959 15-19 | info@bildung-und-begabung.de | www.bildung-und-begabung.de  
Bankverbindung: Sparkasse KölnBonn | IBAN: DE27 3705 0198 0029 0022 50 | BIC: COLSDE33XXX  
Registergericht: Amtsgericht Essen, HRB 22445 | St.-Nr.: 206/5887/1089 | USt.-IDNr.: DE217481695  
Geschäftsführung: Dr. Elke Völmicke, Prof. Dr. Andreas Schlüter

Das bundesweite Talentförderzentrum Bildung & Begabung ist eine Tochter des Stifterverbandes.  
Förderer sind das Bundesministerium für Bildung und Forschung und die Kultusministerkonferenz. Schirmherr ist der Bundespräsident.

## 2. Auswahlklausur 2017/2018

### Aufgabe 1

Es seien  $a_1, a_2, \dots, a_n, k$  und  $M$  positive ganze Zahlen mit den Eigenschaften

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = k \quad \text{und} \quad a_1 a_2 \dots a_n = M.$$

Man beweise: Für  $M > 1$  hat das Polynom

$$P(x) = M(x+1)^k - (x+a_1)(x+a_2)\dots(x+a_n)$$

keine positiven Lösungen.

### Aufgabe 2

Es sei  $ABCDE$  ein konvexes Fünfeck mit den Eigenschaften

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}, \quad \angle BAE = \angle DCB \quad \text{und} \quad \angle EDC = \angle CBA.$$

Man beweise, dass die Lotgerade von  $E$  auf  $BC$  durch den Schnittpunkt von  $AC$  und  $BD$  verläuft.

### Aufgabe 3

Man bestimme alle ganzen Zahlen  $n \geq 2$  mit der folgenden Eigenschaft:

Für beliebige, nicht notwendigerweise verschiedene ganze Zahlen  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , deren Summe nicht durch  $n$  teilbar ist, existiert ein Index  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ), so dass keine der Zahlen

$$m_i, m_i + m_{i+1}, m_i + m_{i+1} + m_{i+2}, \dots, m_i + m_{i+1} + \dots + m_{i+n-1}$$

durch  $n$  teilbar ist. (Dabei sei  $m_i = m_{i-n}$  für  $i > n$ .)

**Bearbeitungszeit: 240 Minuten**

Als Hilfsmittel sind nur Schreibzeug, Zirkel und Geo-Dreieck zugelassen!

#### » BILDUNG & BEGABUNG GEMEINNÜTZIGE GMBH

Kortrijker Straße 1, 53177 Bonn | Postfach 20 02 01, 53132 Bonn | Tel.: +49 228 959 15-0  
Fax: +49 228 959 15-19 | info@bildung-und-begabung.de | www.bildung-und-begabung.de  
Bankverbindung: Sparkasse KölnBonn | IBAN: DE27 3705 0198 0029 0022 50 | BIC: COLSDE33XXX  
Registergericht: Amtsgericht Essen, HRB 22445 | St.-Nr.: 206/5887/1089 | USt.-IDNr.: DE217481695  
Geschäftsführung: Dr. Elke Völmicke, Prof. Dr. Andreas Schlüter

Das bundesweite Talentförderzentrum Bildung & Begabung ist eine Tochter des Stifterverbandes.  
Förderer sind das Bundesministerium für Bildung und Forschung und die Kultusministerkonferenz. Schirmherr ist der Bundespräsident.