

1. Auswahlklausur 2016/2017

1. Gegeben seien positive ganze Zahlen k und n mit $n > k$. Unter einem *Binärwort* der Länge n verstehen wir eine Folge aus n Folgengliedern, die alle 0 oder 1 sind. Anja wählt unter allen möglichen Binärwörtern der Länge n eines aus. Dann schreibt sie alle Binärwörter der Länge n , die sich von ihrem gewählten Wort an genau k Stellen unterscheiden, an eine Tafel. Anschließend betritt Bernhard den Raum. Anja nennt ihm den Wert von k und danach betrachtet er die Binärwörter an der Tafel. Er versucht nun das zu Beginn von Anja gewählte Binärwort zu erraten. Was ist (in Abhängigkeit von k und n) die minimale Anzahl an Versuchen, die Bernhard benötigt um das Binärwort mit Sicherheit zu erraten?
2. Es sei $ABCD$ ein konvexes Viereck. Die Diagonale BD halbiere den Winkel $\angle CBA$. Der Umkreis des Dreiecks ABC schneide die Strecken \overline{CD} und \overline{DA} in den inneren Punkten P bzw. Q . Die durch den Punkt D verlaufende Parallele zur Geraden AC schneide die Geraden BA und BC in den Punkten R bzw. S . Man beweise, dass die vier Punkte P, Q, R und S auf einem gemeinsamen Kreis liegen.
3. Die Menge der positiven ganzen Zahlen sei mit \mathbb{N} bezeichnet. Man bestimme alle Funktionen $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit der folgenden Eigenschaft: Für alle positiven ganzen Zahlen m und n ist die Zahl $f(m) + f(n) - mn$ von 0 verschieden und ist ein Teiler der Zahl $mf(m) + nf(n)$.

Bearbeitungszeit: 180 Minuten

Als Hilfsmittel sind nur Schreibzeug, Zirkel und Geo-Dreieck zugelassen!

» BILDUNG & BEGABUNG GEMEINNÜTZIGE GMBH

Kortrijker Straße 1, 53177 Bonn | Postfach 20 02 01, 53132 Bonn | Tel.: +49 228 959 15-0
Fax: +49 228 959 15-19 | info@bildung-und-begabung.de | www.bildung-und-begabung.de
Bankverbindung: Sparkasse KölnBonn | IBAN: DE27 3705 0198 0029 0022 50 | BIC: COLSDE33XXX
Registergericht: Amtsgericht Essen, HRB 22445 | St.-Nr.: 206/5887/1089 | USt.-IDNr.: DE217481695
Geschäftsführung: Dr. Elke Völmicke, Prof. Dr. Andreas Schlüter

Das bundesweite Talentförderzentrum Bildung & Begabung ist eine Tochter des Stifterverbandes.
Förderer sind das Bundesministerium für Bildung und Forschung und die Kultusministerkonferenz. Schirmherr ist der Bundespräsident.

2. Auswahlklausur 2016/2017

Aufgabe 1

Man bestimme die kleinste reelle Konstante C mit folgender Eigenschaft:

Für fünf beliebige positive reelle Zahlen a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 , die nicht unbedingt verschieden sein müssen, lassen sich stets paarweise verschiedene Indizes i, j, k, l finden, so dass

$$\left| \frac{a_i - a_k}{a_j - a_l} \right| \leq C \text{ gilt.}$$

Aufgabe 2

Es sei n eine positive ganze Zahl, die teilerfremd zu 6 ist. Wir färben die Ecken eines regulären n -Ecks so mit drei Farben, dass für jede Farbe die Anzahl der mit ihr gefärbten Ecken ungerade ist.

Man beweise, dass es dann stets ein gleichschenkliges Dreieck gibt, dessen Ecken zu den Ecken des n -Ecks gehören und alle verschieden gefärbt sind.

Aufgabe 3

Es sei ABC ein Dreieck mit $AB = AC \neq BC$. Ferner sei I der Inkreismittelpunkt von ABC . Die Gerade BI schneidet AC im Punkt D , und die Orthogonale zu AC durch D schneidet AI im Punkt E .

Man beweise, dass der Spiegelpunkt von I bei Spiegelung an der Achse AC auf dem Umkreis des Dreiecks BDE liegt.

Bearbeitungszeit: 180 Minuten

Als Hilfsmittel sind nur Schreibzeug, Zirkel und Geo-Dreieck zugelassen!

» BILDUNG & BEGABUNG GEMEINNÜTZIGE GMBH

Kortrijker Straße 1, 53177 Bonn | Postfach 20 02 01, 53132 Bonn | Tel.: +49 228 959 15-0
Fax: +49 228 959 15-19 | info@bildung-und-begabung.de | www.bildung-und-begabung.de
Bankverbindung: Sparkasse KölnBonn | IBAN: DE27 3705 0198 0029 0022 50 | BIC: COLSDE33XXX
Registergericht: Amtsgericht Essen, HRB 22445 | St.-Nr.: 206/5887/1089 | USt.-IDNr.: DE217481695
Geschäftsführung: Dr. Elke Völmicke, Prof. Dr. Andreas Schlüter

Das bundesweite Talentförderzentrum Bildung & Begabung ist eine Tochter des Stifterverbandes.
Förderer sind das Bundesministerium für Bildung und Forschung und die Kultusministerkonferenz. Schirmherr ist der Bundespräsident.