

## 1. Auswahlklausur 2015/2016

### 1. Aufgabe

Die beiden Kreise  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  mit den Mittelpunkten  $O_1$  beziehungsweise  $O_2$  mögen sich in den beiden verschiedenen Punkten  $A$  und  $B$  schneiden. Eine durch  $A$  verlaufende Gerade treffe  $\Gamma_1$  erneut im Punkt  $C \neq A$  und  $\Gamma_2$  in  $D \neq A$ . Die Geraden  $CO_1$  und  $DO_2$  mögen sich in  $X$  schneiden.

Man beweise, dass die vier Punkte  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $B$  und  $X$  auf einem gemeinsamen Kreis liegen.

### 2. Aufgabe

Die positiven ganzen Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  mögen im Uhrzeigersinn entlang einer Kreislinie angeordnet sein, wobei  $n \geq 5$ . Setze  $a_0 = a_n$  und  $a_{n+1} = a_1$ . Für jedes  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  sei der Quotient

$$q_i = \frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{a_i}$$

ein ganze Zahl.

Man beweise, dass

$$2n \leq q_1 + q_2 + \dots + q_n < 3n.$$

### 3. Aufgabe

Am Anfang stehen 100 ganze Zahlen in einer Zeile an der Tafel. Kain und Abel spielen das folgende Spiel: Eine *Zug* beginnt damit, dass Kain einen Block benachbarter Zahlen auswählt; dabei darf die Länge dieses Blockes jede der Zahlen  $1, 2, \dots, 100$  sein und es ist insbesondere auch erlaubt, dass Kain nur eine einzige Zahl auswählt. Sobald Kain gewählt hat, muss sich Abel entscheiden, ob er entweder zu jeder der Zahlen aus dem gewählten Block 1 addiert oder ob er von jeder dieser Zahlen 1 subtrahiert. Daraufhin beginnt der nächste Zug u.s.w.

Wenn nach Abschluss eines Zuges eine Situation erreicht ist, in der mindestens 98 der an der Tafel stehenden Zahlen durch 4 teilbar sind, hat Kain gewonnen.

Man beweise, dass Kain erzwingen kann, in endlich vielen Zügen zu gewinnen.

**Bearbeitungszeit: 180 Minuten**

Als Hilfsmittel sind nur Schreibzeug, Zirkel und Geo-Dreieck zugelassen!

#### » BILDUNG & BEGABUNG GEMEINNÜTZIGE GMBH

Kortrijker Straße 1, 53177 Bonn | Postfach 20 02 01, 53132 Bonn | Tel.: +49 228 959 15-0  
Fax: +49 228 959 15-19 | info@bildung-und-begabung.de | www.bildung-und-begabung.de  
Bankverbindung: Sparkasse KölnBonn | IBAN: DE27 3705 0198 0029 0022 50 | BIC: COLSDE33XXX  
Registergericht: Amtsgericht Essen, HRB 22445 | St.-Nr.: 206/5887/1089 | USt.-IDNr.: DE217481695  
Geschäftsführung: Dr. Elke Völmicke, Prof. Dr. Andreas Schlüter

Das bundesweite Talentförderzentrum Bildung & Begabung ist eine Tochter des Stifterverbandes.  
Förderer sind das Bundesministerium für Bildung und Forschung und die Kultusministerkonferenz. Schirmherr ist der Bundespräsident.

## 2. Auswahlklausur 2015/2016

### Aufgabe 1

Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen  $m$  mit folgender Eigenschaft:

Die Folge  $a_0, a_1, a_2, \dots$  mit  $a_0 = \frac{2m+1}{2}$  und  $a_{k+1} = a_k \lfloor a_k \rfloor$  für  $k = 0, 1, 2, \dots$  enthält wenigstens eine ganze Zahl.

Hinweis:  $\lfloor x \rfloor$  bezeichnet den größten ganzen Teil (*integer-Funktion*) von  $x$ .

### Aufgabe 2

Man bestimme alle Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  die Gleichung

$$f(x - f(y)) = f(f(x)) - f(y) - 1 \quad (1)$$

erfüllen.

### Aufgabe 3

Es sei  $ABC$  ein rechtwinkliges Dreieck mit  $\angle ACB = \gamma = 90^\circ$ . Ferner sei  $H$  der Fußpunkt der Höhe von  $C$  auf  $AB$ .

Nun wählen wir einen Punkt  $D$  so im Inneren des Dreiecks  $HBC$ , dass  $CH$  die Strecke  $AD$  halbiert, und bezeichnen den Schnittpunkt von  $CH$  und  $BD$  mit  $P$ . Über der Strecke  $BD$  als Durchmesser errichten wir denjenigen Halbkreis  $k$ , der von  $BC$  geschnitten wird. Eine Gerade durch  $P$  berührt  $k$  im Punkt  $Q$ .

Man beweise, dass sich die Geraden  $CQ$  und  $AD$  stets auf  $k$  schneiden.

**Bearbeitungszeit: 180 Minuten**

Als Hilfsmittel sind nur Schreibzeug, Zirkel und Geo-Dreieck zugelassen!

#### » BILDUNG & BEGABUNG GEMEINNÜTZIGE GMBH

Kortrijker Straße 1, 53177 Bonn | Postfach 20 02 01, 53132 Bonn | Tel.: (02 28) 9 59 15-0, Fax: (02 28) 9 59 15-19  
info@bildung-und-begabung.de, www.bildung-und-begabung.de | Registergericht: Amtsgericht Essen, HRB 22445  
Steuer-Nr.: 206/5887/1089 | USt.-IDNr.: DE217481695 | Bankverbindung: IBAN: DE27 3705 0198 0029 0022 50  
BIC: COLSDE33XXX, Sparkasse KölnBonn | Geschäftsführung: Dr. Elke Völmicke, Prof. Dr. Andreas Schlüter

Das bundesweite Talentförderzentrum Bildung & Begabung ist eine Tochter des Stifterverbandes.  
Förderer sind das Bundesministerium für Bildung und Forschung und die Kultusministerkonferenz. Schirmherr ist der Bundespräsident.